УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

Параллельный алгоритм глобальной оптимизации с монотонным преобразованием целевой функции

К. А. Баркалов | А. С. Кудрявцев

УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

Постановка задачи глобальной оптимизации:

Требуется найти глобальный минимум многоэкстремальной функции в области D

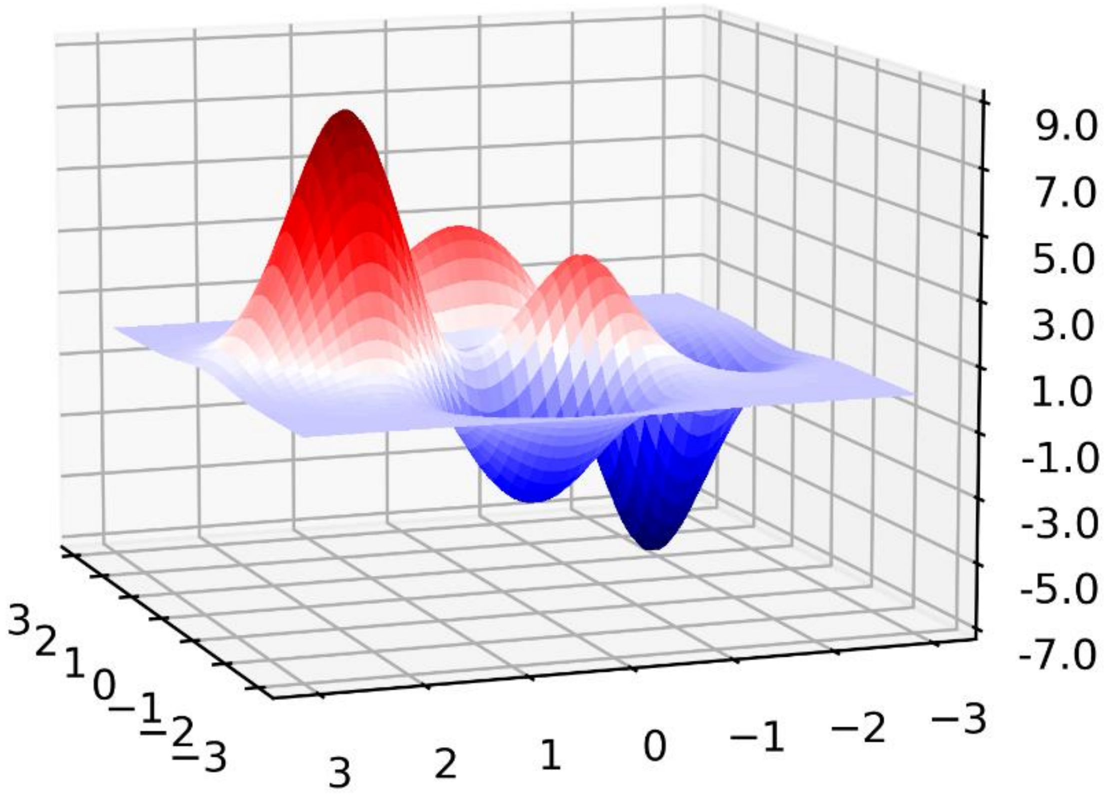
$$\varphi(x^*) = \min\{\varphi(x) : x \in D\}$$

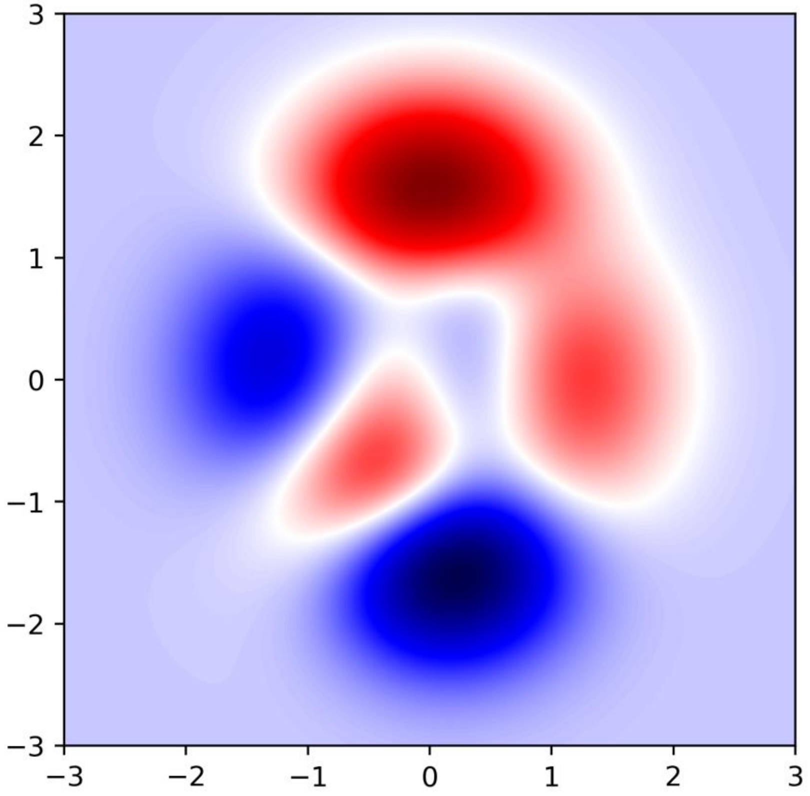
$$D = \{\, x \in R^N \ : a_i \le x_i \le b_i, 1 \le i \le N \,\}$$

Предполагается, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица в области D:

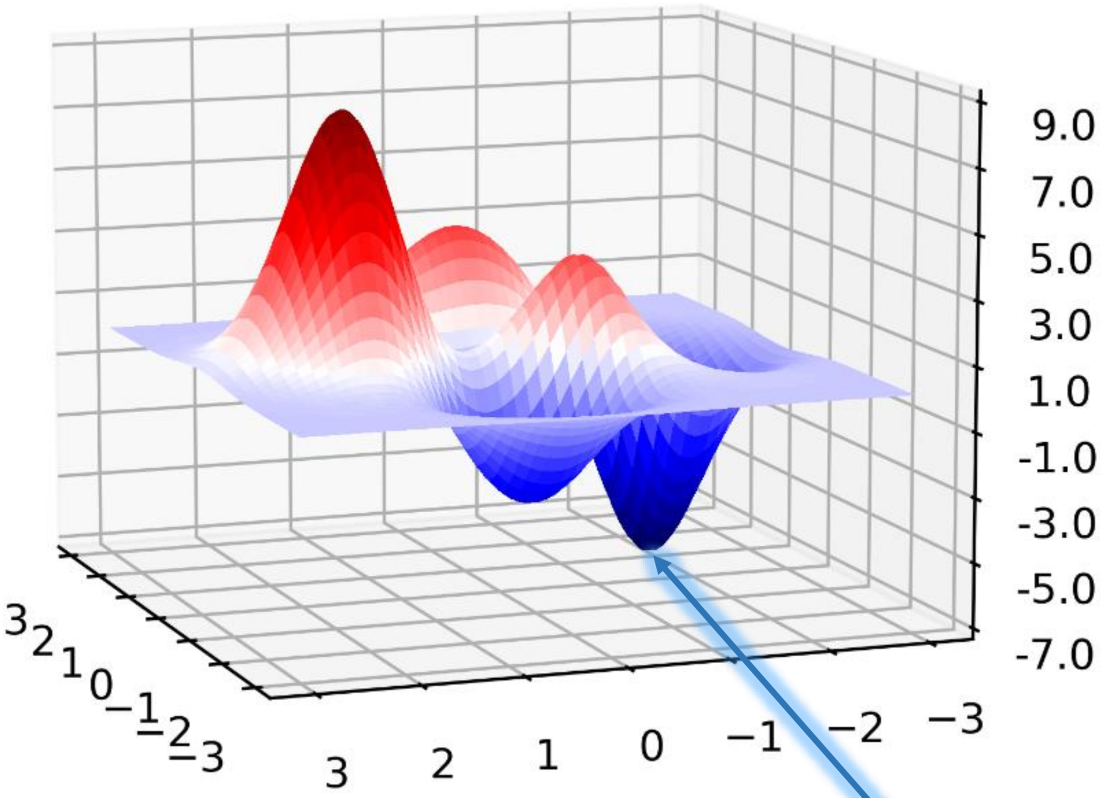
$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L \, \|x_1 - x_2\|, \ x_1, x_2 \in D, 0 < L < +\infty$$

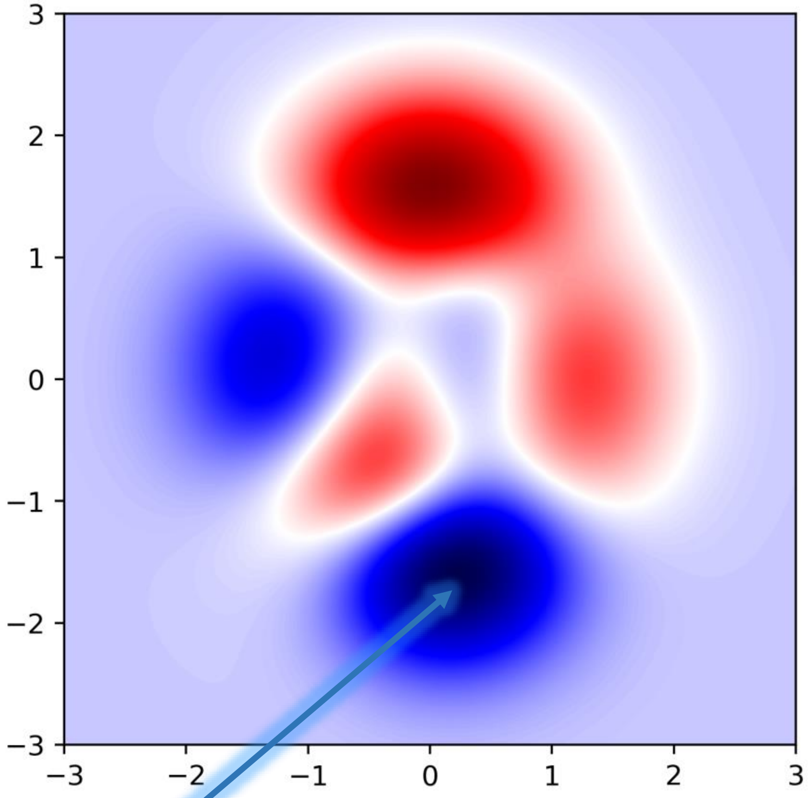
Постановка задачи глобальной оптимизации





Постановка задачи глобальной оптимизации

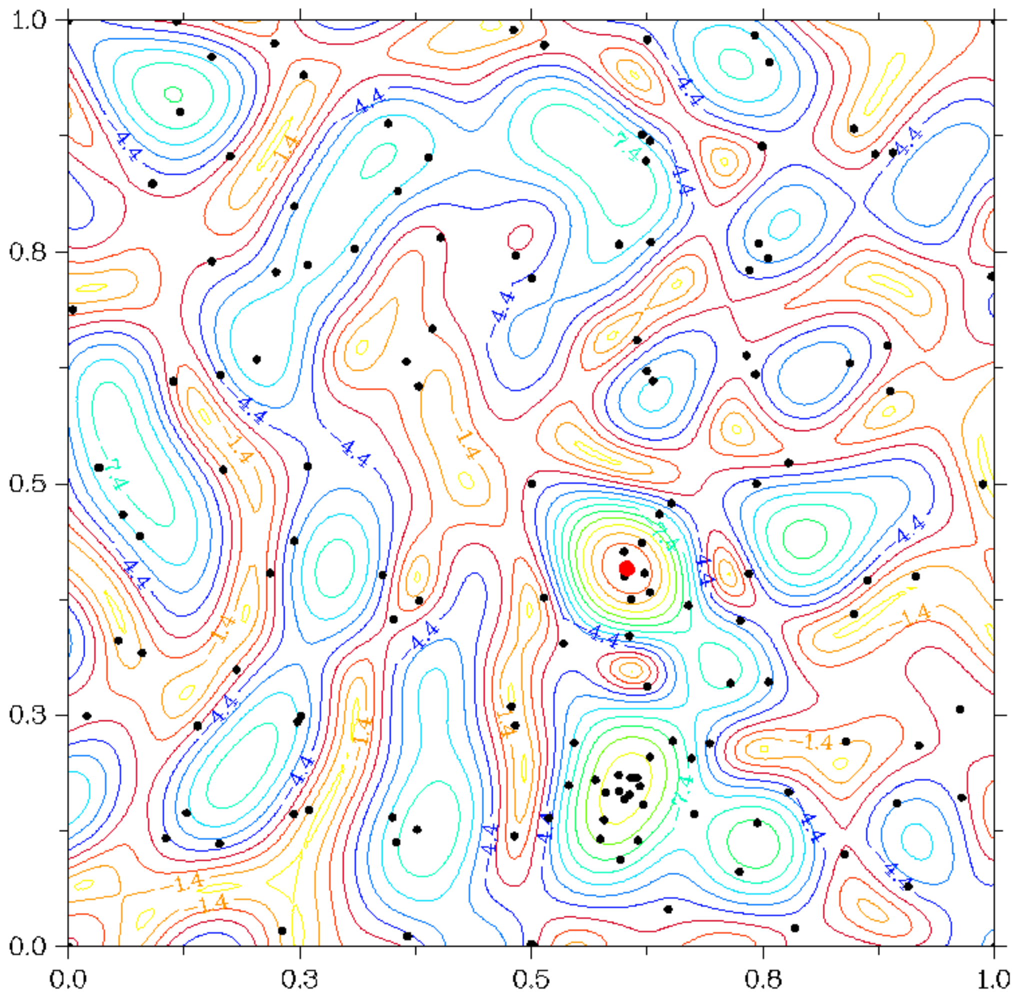




Глобальный минимум

Постановка задачи глобальной оптимизации

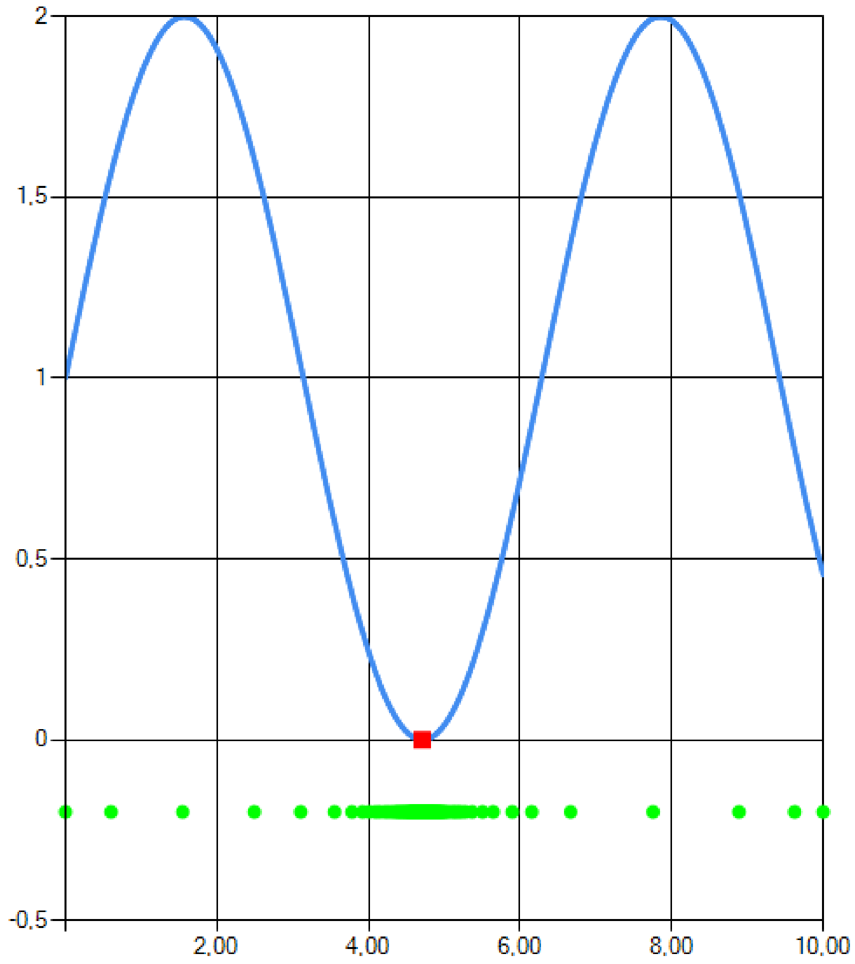
- Функция может задаваться как чёрный ящик
- Функция может быть многоэкстремальной
- Вычисление функции может занимать много времени



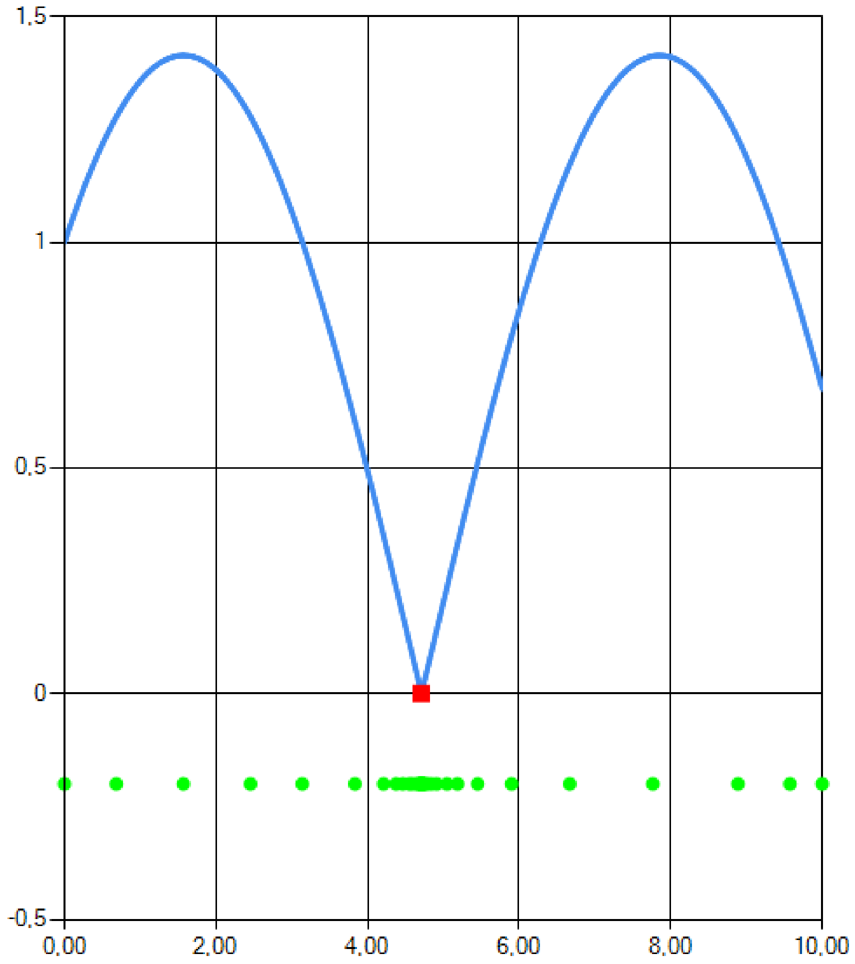
Монотонное преобразование

- Минимизируем не саму функцию, а её преобразование
- Функция преобразования должна удовлетворять условию Липшица и не менять положение точки глобального минимума
- Получаем *почти монотонную сходимость* к точке глобального минимума в ее малой окрестности
- Примеры таких функций преобразования
  - $\Phi(y) = \sqrt{1 - \left(\frac{z_k^+ - \varphi(y)}{z_k^+ - z_k^-}\right)^2}$, где $z_k^+ = \max\limits_{1 \le i \le k} \varphi(y^i)$, $z_k^- = \min\limits_{1 \le i \le k} \varphi(y^i)$
  - $\Phi(y) = \sqrt{\varphi(y) - z_k^-}$, где $z_k^- = \min\limits_{1 \le i \le k} \varphi(y^i)$

Монотонное преобразование



БЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



ПРЕОБРАЗОВАННАЯ ФУНКЦИЯ

F(X)
ЛУЧШИЙ РЕЗУЛЬТАТ
ТОЧКИ ИСПЫТАНИЙ

БЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
156 ИСПЫТАНИЙ

ПРЕОБРАЗОВАННАЯ ФУНКЦИЯ
21 ИСПЫТАНИЕ

Основное соотношение многошаговой схемы редукции размерности:

$$\boxed{\varphi^* = \min_{x \in D} \varphi(x) = \min_{a_1 \le x_1 \le b_1} \dots \min_{a_n \le x_n \le b_n} \varphi(x_1, \dots, x_n)}$$

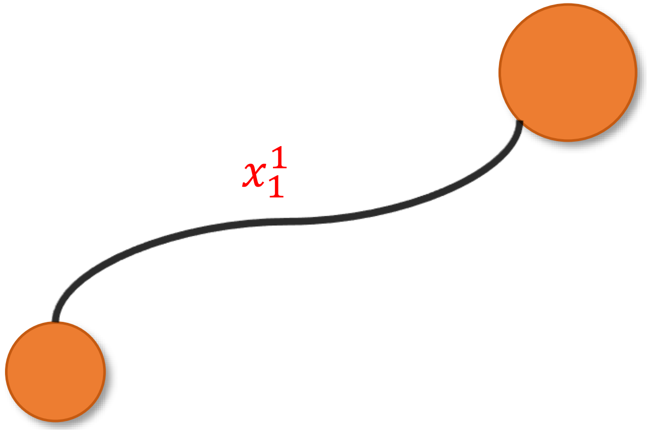
Для функции двух переменных:

$$\varphi^* = \min_{x \in D} \varphi(x) = \min_{a_1 \le x_1 \le b_1} \varphi_1(x_1)$$

$$\varphi_1(x_1) = \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1, x_2)$$

Многошаговая схема редукции размерности

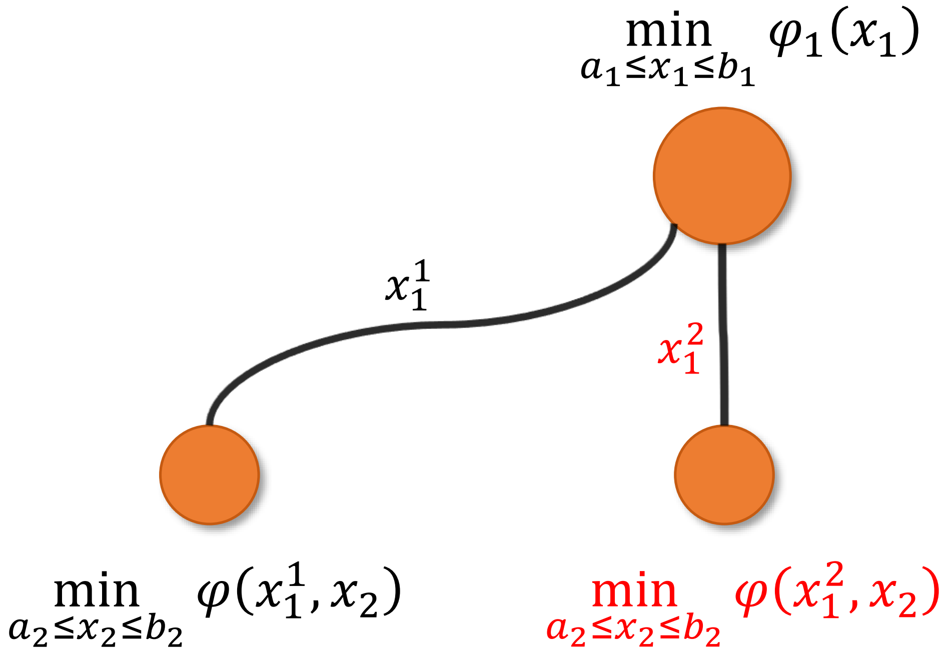
$$\min_{a_1 \le x_1 \le b_1} \varphi_1(x_1)$$



$$\min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1^1, x_2)$$

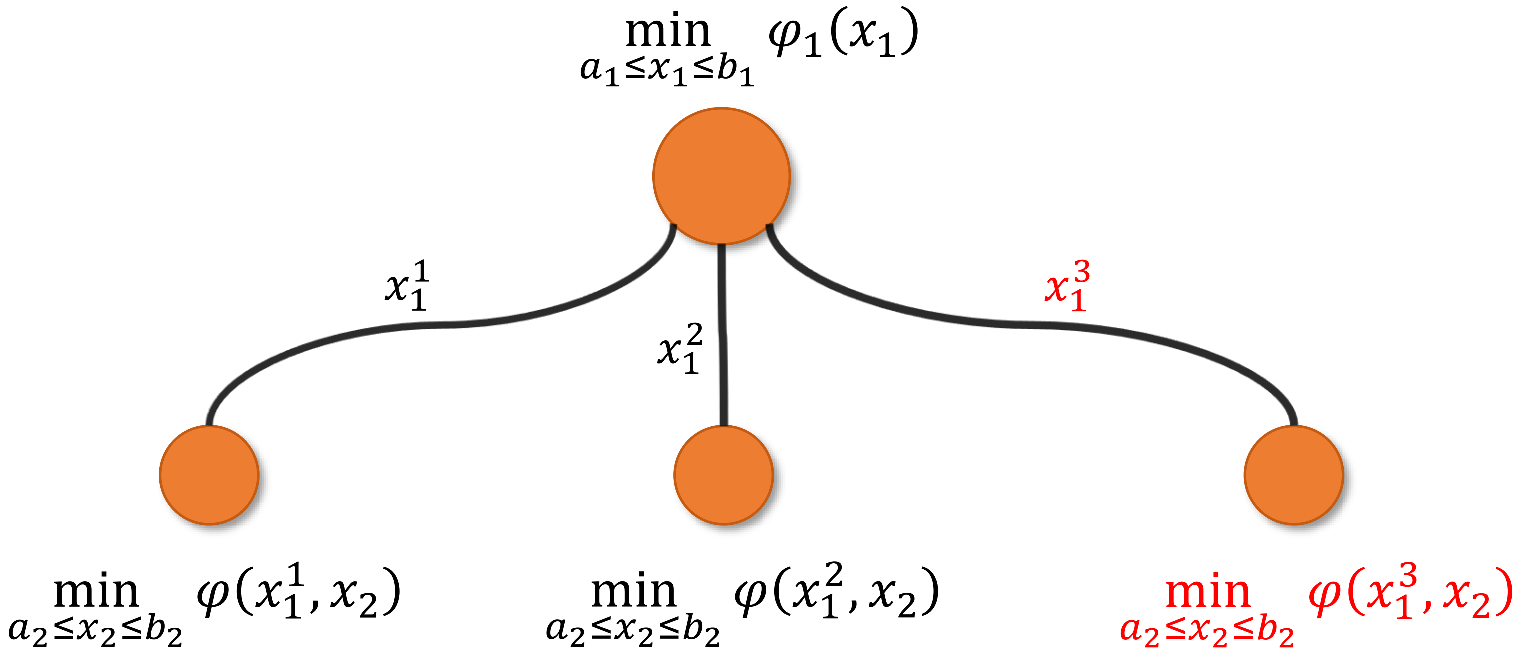
$$\varphi_1(x_1) = \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1, x_2)$$

Многошаговая схема редукции размерности



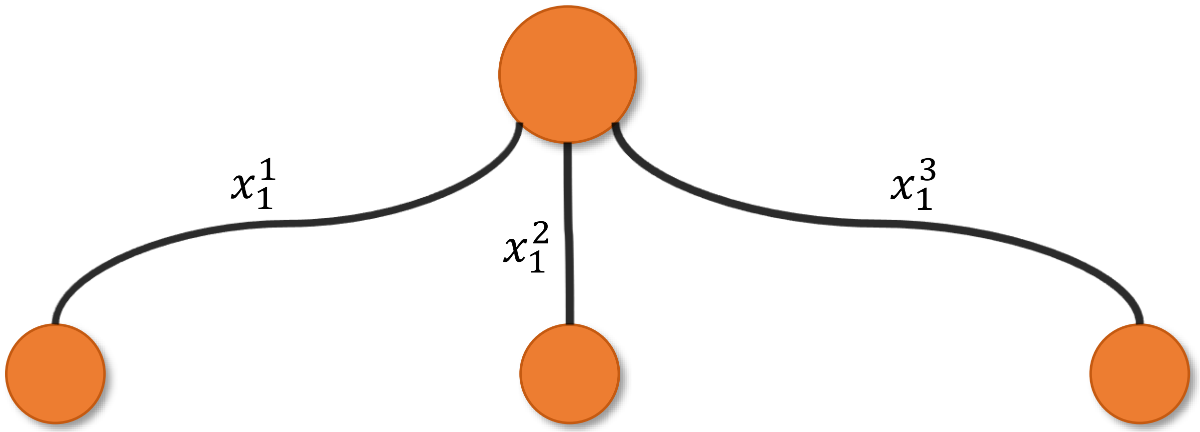
$$\varphi_1(x_1) = \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1, x_2)$$

Многошаговая схема редукции размерности



$$\varphi_1(x_1) = \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1, x_2)$$

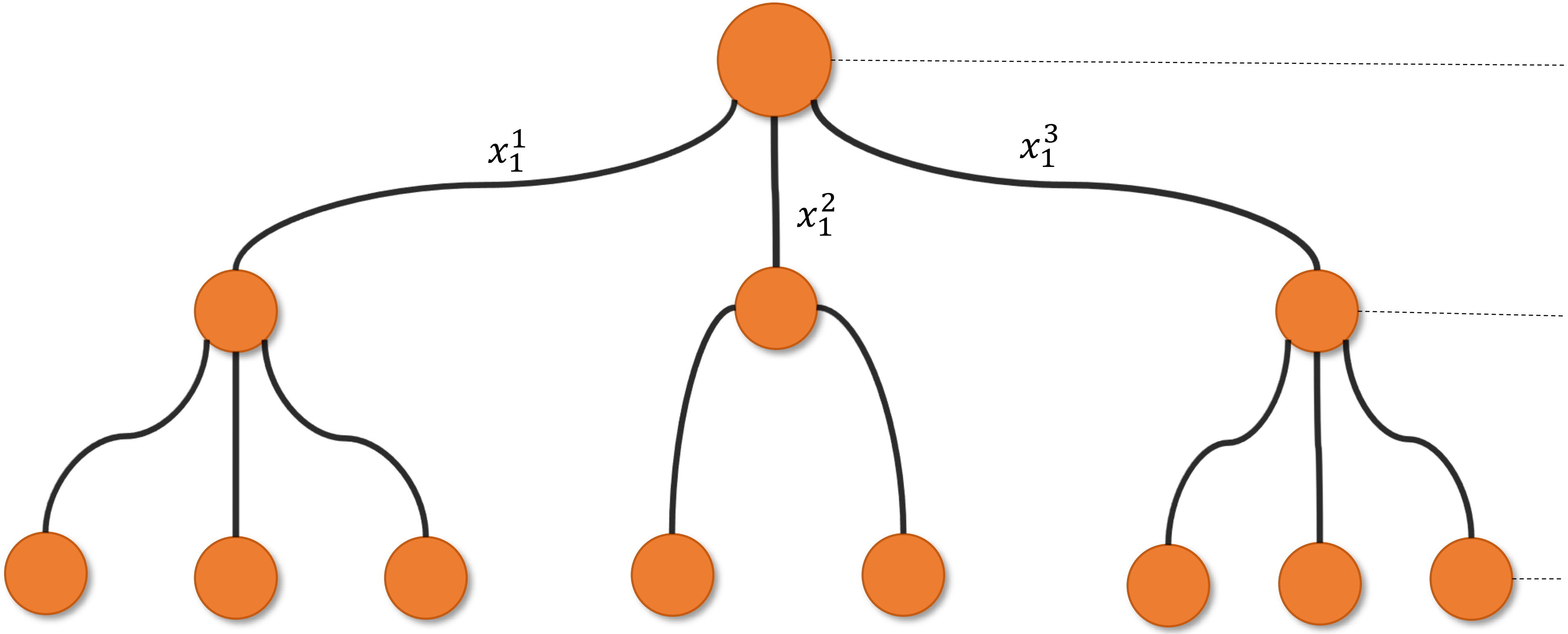
$$\min_{a_1 \le x_1 \le b_1} \varphi_1(x_1)$$



$$\min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1^1, x_2) \qquad \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1^2, x_2) \qquad \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1^3, x_2)$$

$$\varphi_1(x_1) = \min_{a_2 \le x_2 \le b_2} \varphi(x_1, x_2)$$

Многошаговая схема редукции размерности



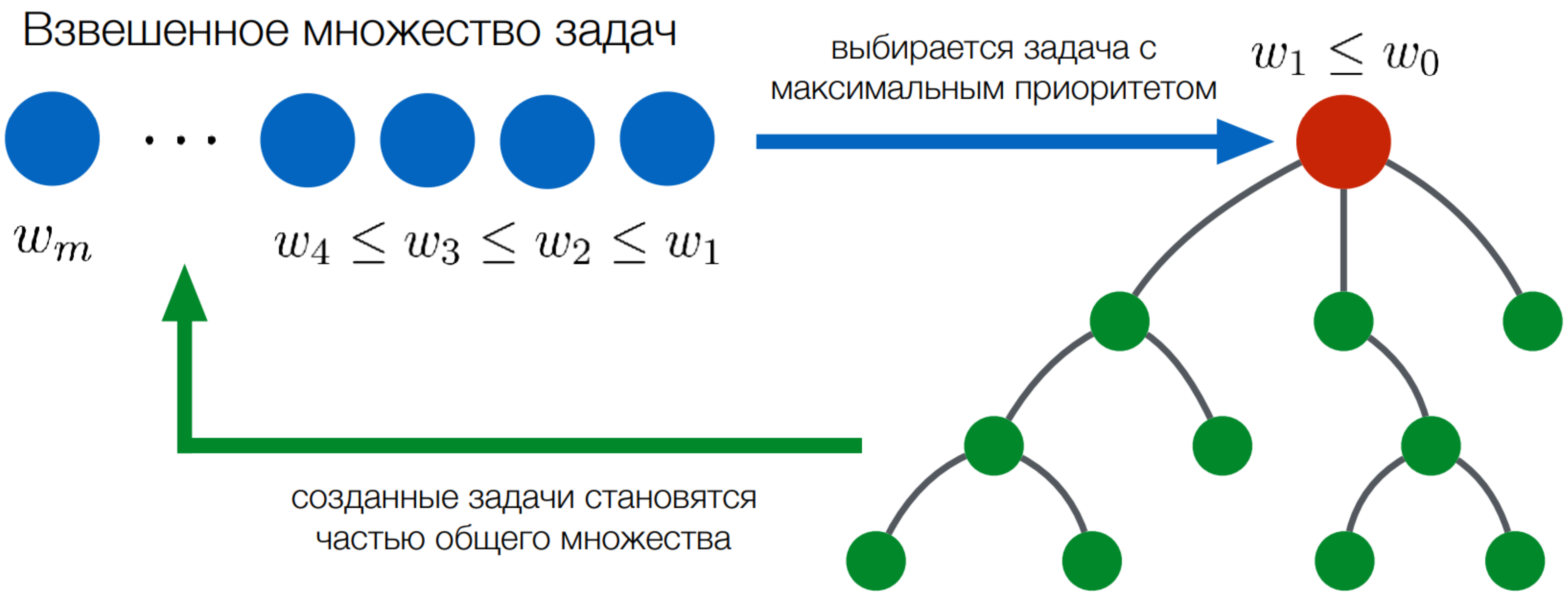
$$\varphi_1(x_1) \to \min_{a_1 \le x_1 \le b_1}$$

$$\varphi_2(x_1^i, x_2) \to \min_{a_2 \le x_2 \le b_2}$$

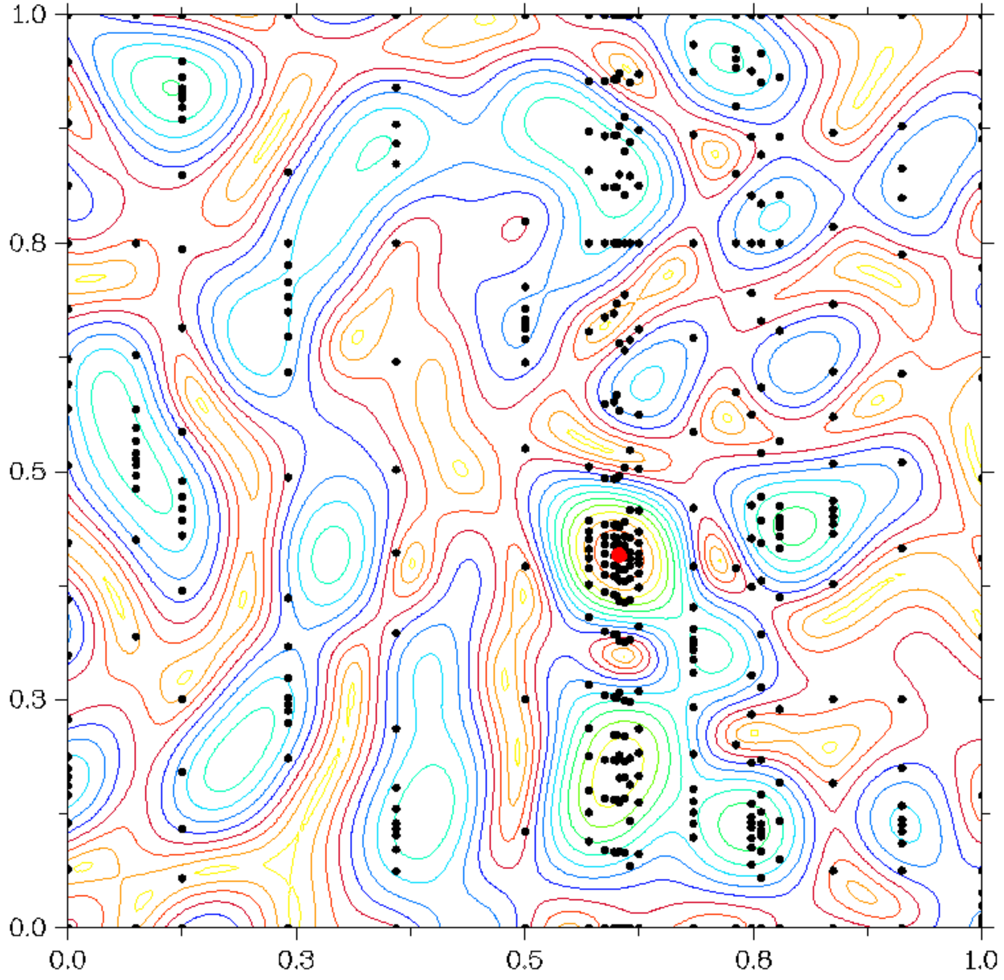
$$\varphi_2(x_1^i, x_2^{i,j}) \to \min_{a_3 \le x_3 \le b_3}$$

УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

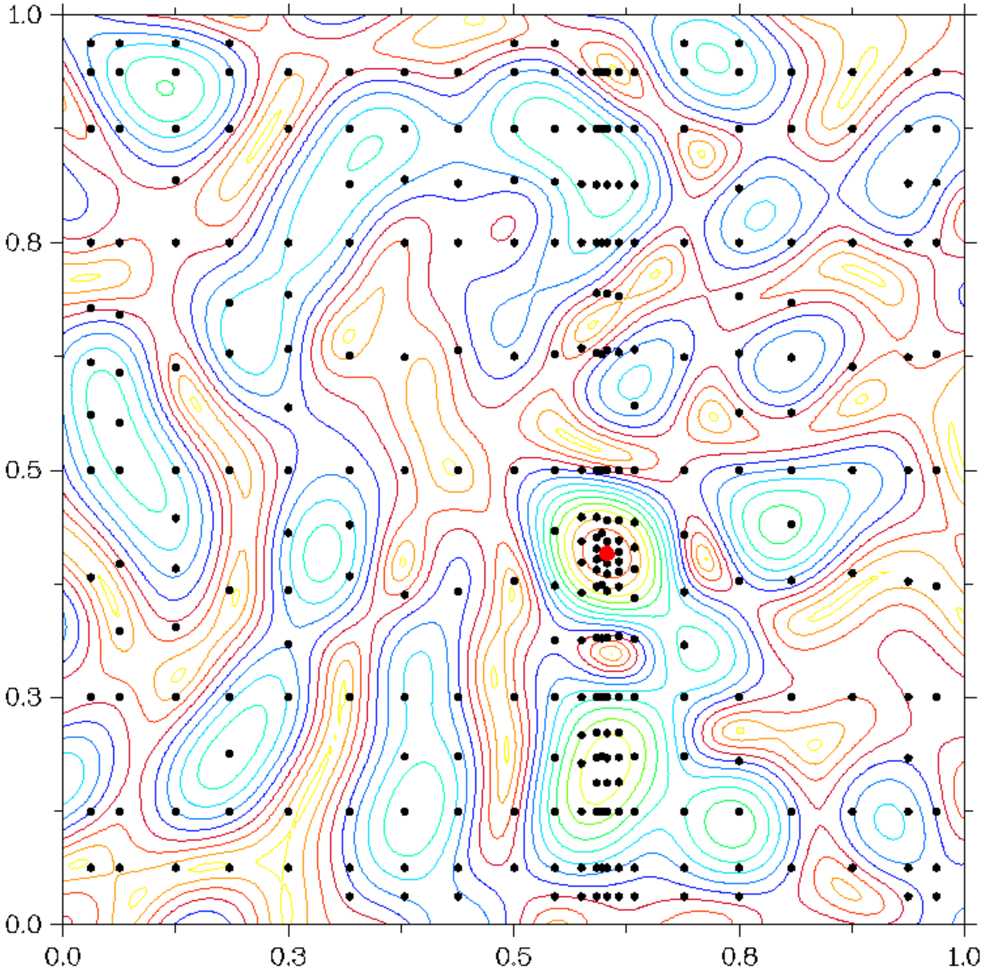
- Основное отличие от обычной схемы в том, что все задачи решаются одновременно.



Адаптивная многошаговая схема



ОБЫЧНАЯ



АДАПТИВНАЯ

ОБЫЧНАЯ
441 ИСПЫТАНИЕ

АДАПТИВНАЯ
307 ИСПЫТАНИЙ

Общая структура характеристических алгоритмов:

Пусть произведено k испытаний, тогда

1. Упорядочить поисковую информацию по возрастанию координат точек испытаний
2. Вычислить для каждого интервала величину $R(i)$, называемую характеристикой.
3. Выбрать интервал номер t с наибольшей характеристикой и провести в нем испытание:

$$x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}; x_t)$$

Повторять эти действия, пока не будет выполнено условие остановки:

$$x_t - x_{t-1} < \varepsilon$$

Алгоритм глобального поиска (АГП) выглядит следующим образом

Характеристика R:

$$R(1) = 2\Delta_1 - \frac{4z_1}{m}, \qquad R(k+1) = 2\Delta_k - \frac{4z_k}{m}$$

$$R(i) = m(x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - 2(x_i - x_{i-1}), \qquad 2 \le i \le k$$

Точка следующего испытания:

$$x^{k+1} = \frac{(x^t + x^{t-1})}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2m}, \qquad 2 \le t \le k$$

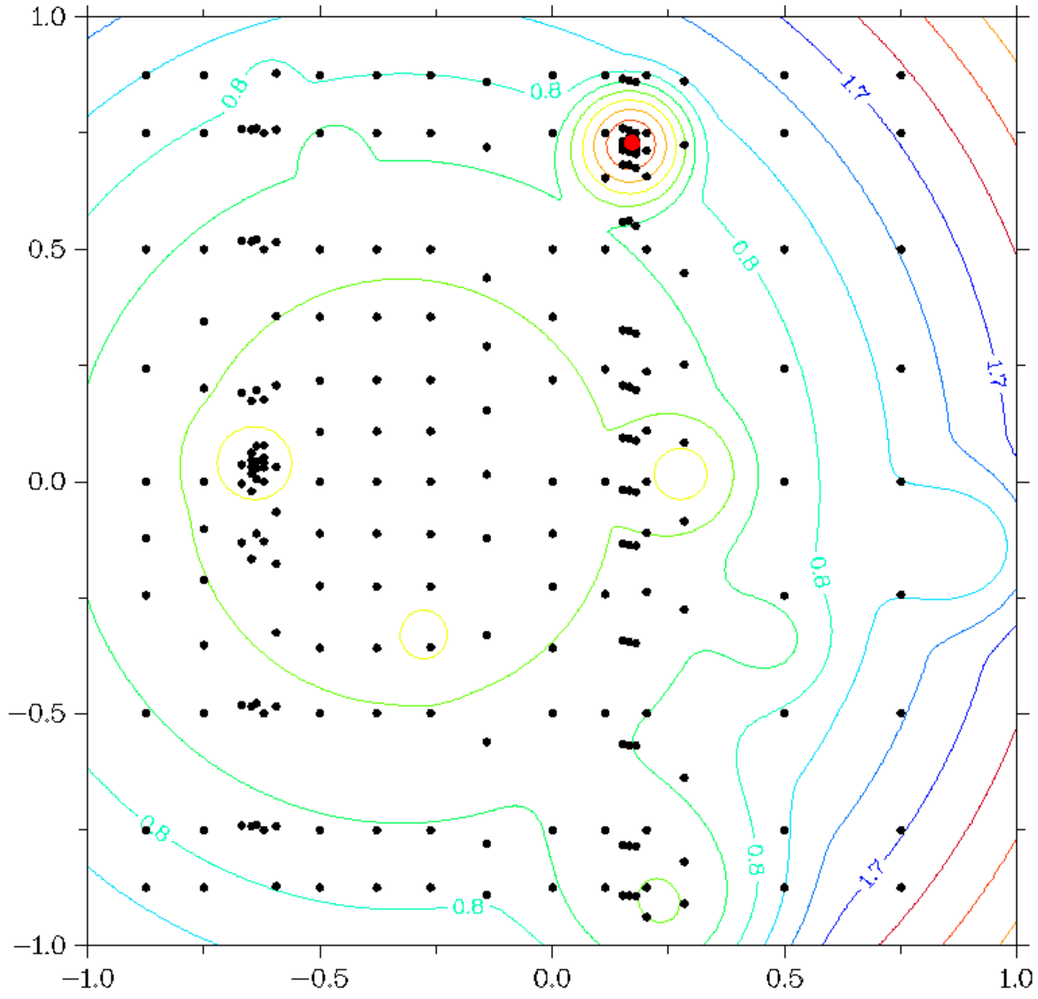
$$x^{k+1} = \frac{(x^t + x^{t-1})}{2}, \qquad t = 1, \qquad t = k+1$$

Упрощенно можно описать следующим образом:

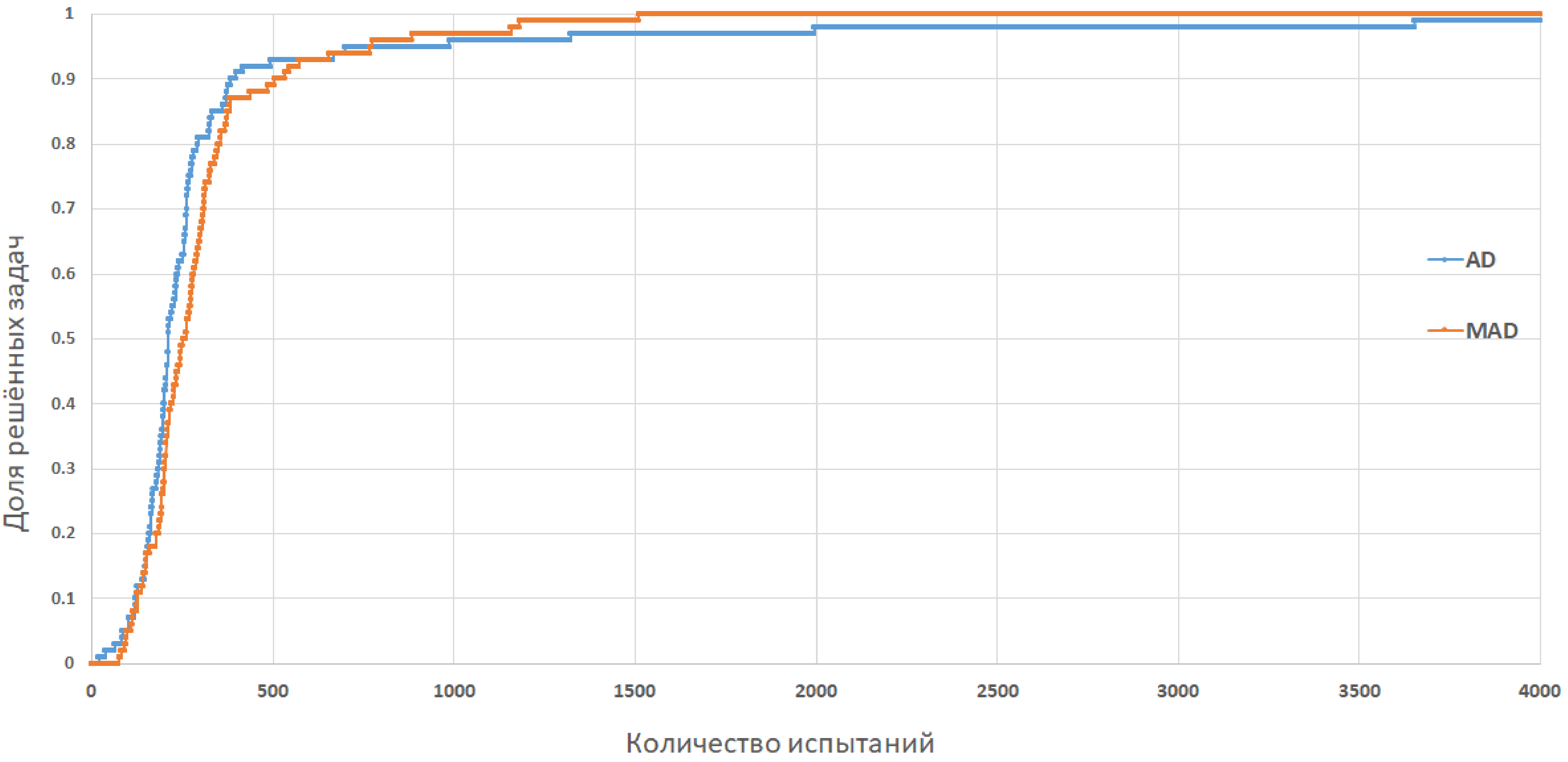
1. Берем все интервалы от всех подзадач
2. Применяем монотонное преобразование
3. Считаем характеристики, используя преобразованные значения
4. Выбираем p интервалов с наибольшими характеристиками и параллельно проводим в них новые испытания
5. Повторяем, пока не выполнится условие остановки

$$f(x) = \begin{cases} C_i(x), x \in S_i, i \in 2, \ldots, m \\ \|y - T\|^2 + t, x \notin S_i, i \in 2, \ldots, m \end{cases}$$

- Варьируемое число локальных минимумов
- Варьируемый размер области притяжения глобального минимума

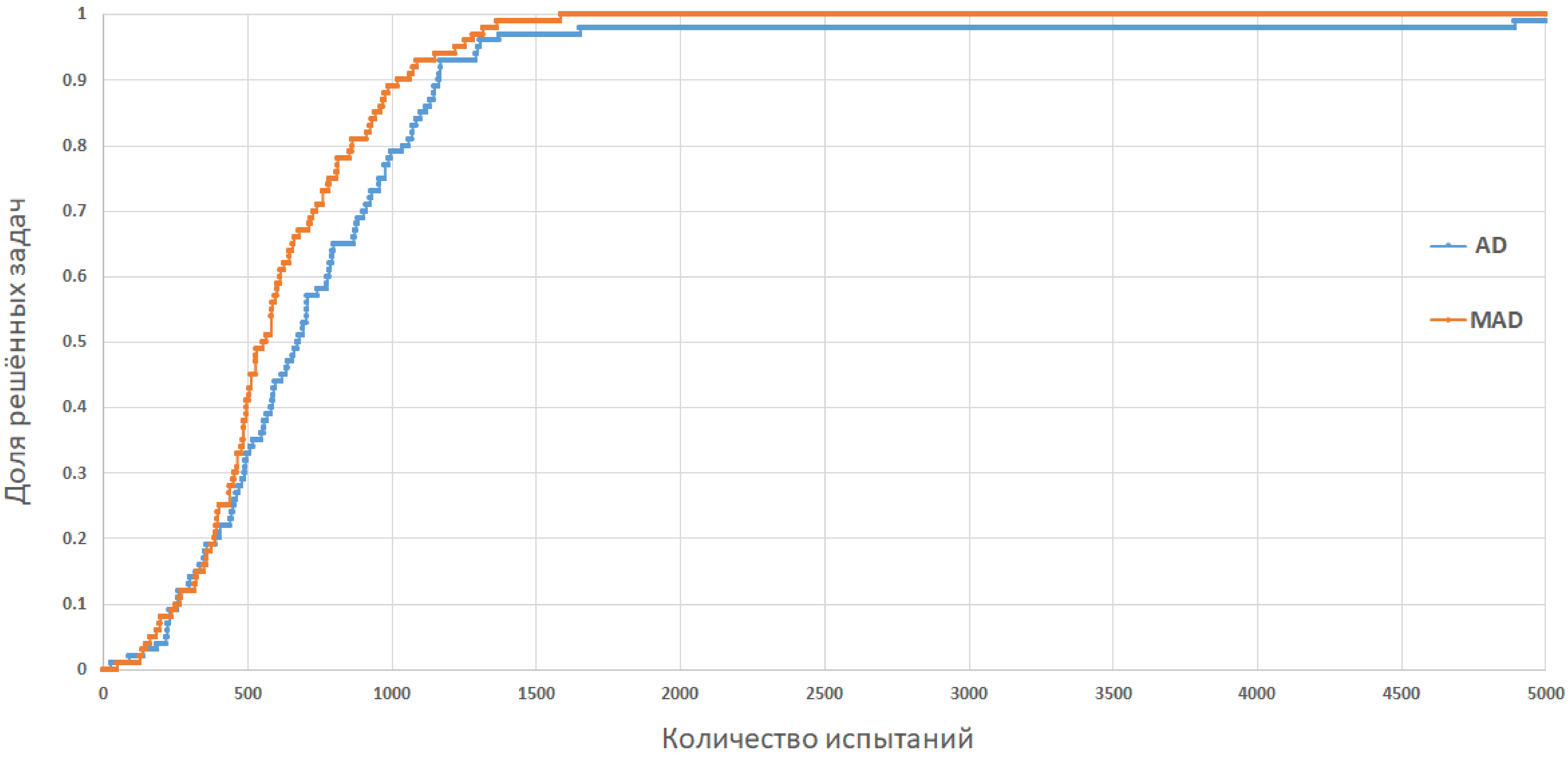


Результаты экспериментов – GKLS Simple 2D



Результаты экспериментов – GKLS Hard 2d

УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО



Результаты экспериментов – параллельная версия

УНИВЕРСИТЕТ ЛОБАЧЕВСКОГО

Среднее число итераций K_{av}, время работы T_{av} и ускорение S_{av} параллельного алгоритма при решении задач GKLS *Simple 2D* и *Hard 2D*.

p	Класс Simple 2D			Класс Hard 2D		
	K_{av}	T_{av}	S_{av}	K_{av}	T_{av}	S_{av}
1	302.4	6.61	1.0	702.1	15.25	1.0
4	80.6	1.85	3.6	181.6	4.17	3.7
8	47.3	1.11	6.0	96.7	2.26	6.8
32	20.0	0.52	12.8	41.8	1.07	14.3
64	12.2	0.36	18.6	22.3	0.63	24.3

Спасибо за внимание!