

September 25-26, 2023, Moscow, Russia

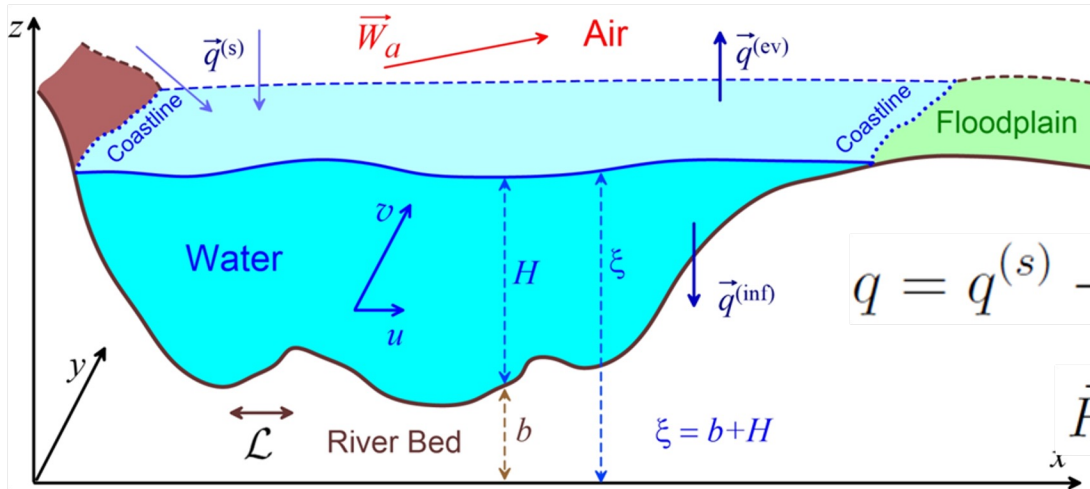
Simulation of Free-Surface Fluid Dynamics: Parallelization for GPUs

Савин Егор Сергеевич,

Хоперсков А.В., Асранкулов А.В., Храпов С.С.

Волгоградский государственный университет, 2023

Моделирование гидрологического режима крупных речных систем Модель мелкой воды на основе системы уравнений Сен-Венана



$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = q$$

$$q = q^{(s)} - q^{(inf)} - q^{(ev)} \quad \lambda = 2gn_M^2/H^{4/3}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{frict} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{wind}$$

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(Hu^2 + \frac{1}{2}g_0H^2 \right) + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} = -\frac{1}{2}\lambda H u \sqrt{u^2 + v^2} - g_0H \frac{\partial b}{\partial x} + f_x^{(Cor)}$$

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Hvu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(Hv^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right) = -\frac{1}{2}\lambda H v \sqrt{u^2 + v^2} - gH \frac{\partial b}{\partial y} + f_y^{(Cor)}$$

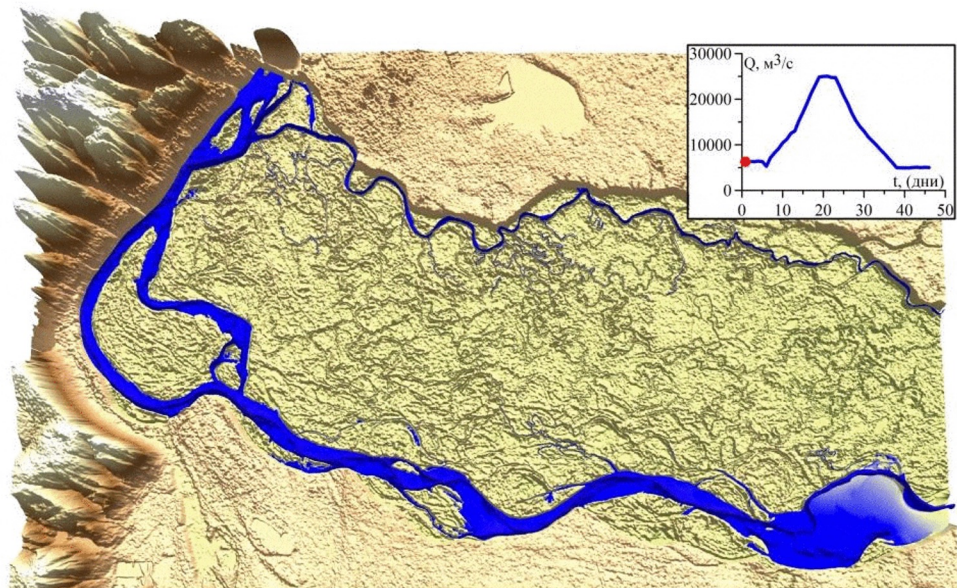
$$\mathbf{f}^{(turb)} = \nabla_{\perp} (v_{turb} \nabla_{\perp} \mathbf{u}), \quad \nabla_{\perp} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

$$\mathbf{f}^{(wind)} = C_a \frac{\rho_a}{\rho H} (\mathbf{W} - \mathbf{u}) \cdot |\mathbf{W} - \mathbf{u}|$$

$$C_a = 10^{-3} \cdot (0.5 + 0.1 \cdot |\mathbf{W} - \mathbf{u}|)$$

Приближения:

- 1) $H \ll L$
- 2) Гидростатическое рав-сие
- 3) Погрешности задания правых частей ур-ний



Затопление Волго-Ахтубинской поймы

Моделирование гидрологического режима весенних затоплений;
Построение кадастровых карт затоплений и подтоплений;
Построение оптимальных гидрографов ГЭС;
Технические экспертизы гидросооружений;
Системы поддержки решений социально-экономического развития пойменных территорий.

Цель: создание инструментов для тестирования модели мелкой воды на основе моделирования трехмерной динамики воды.

Метод сглаженных частиц (Smoothed-particle Hydrodynamics, SPH):

Сложные граничные условия, Цифровая модель рельефа местности;

Сквозной подход вычисления жидкости и граничных условий;

Простота описания границы раздела вода-воздух и моделирования обрушений водной поверхности;

Эффективность распараллеливания алгоритма SPH на GPUs.

SPH - метод [Monaghan, 1992]

SPH - аппроксимация

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \Pi_{ij} \nabla W_p(|\Delta \mathbf{r}_{ij}|, h_{ij}) + \mathbf{f}_i$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla W(|\Delta \mathbf{r}_{ij}|, h_{ij})$$

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

$$h_{ij} = (h_i + h_j)/2$$

$$h_i = A (m_i / \rho_i)^{1/3}$$

$$\Pi_{ij} = \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \nu_{ij}^a$$

ν_{ij}^a - искусственная вязкость

$A = 1.2 \div 1.3$ [Monaghan, 2005; Lodato, 2011]

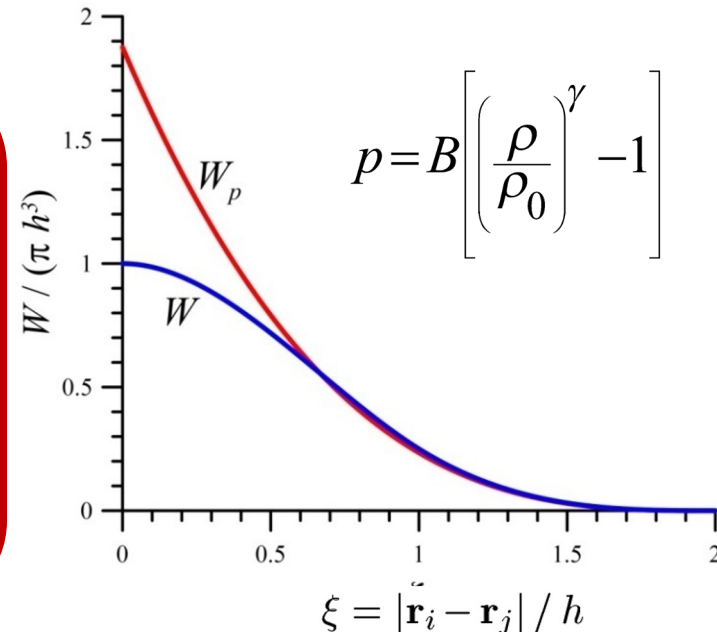
Сглаживающие ядра

$$W(\xi, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi^3, & 0 \leq \xi \leq 1; \\ \frac{1}{4} (2 - \xi)^3, & 1 \leq \xi \leq 2; \\ 0, & \xi \geq 2; \end{cases}$$

[Monaghan, 1992]

$$W_p(\xi, h) = \frac{15}{64\pi h^3} \begin{cases} (2 - \xi)^3, & 0 \leq \xi \leq 2; \\ 0, & \xi \geq 2; \end{cases}$$

[Muller, 2003]



Интегрирование по времени

Схема предиктор-корректор с перешагиванием (leapfrog)

(I) Предиктор (Kick):

$$\tilde{u}_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \Delta t \frac{du_i(r(t), u(t))}{dt}$$

$$\tilde{\rho}_i(t + \Delta t) = \rho_i(t) + \Delta t \frac{d\rho_i(r(t))}{dt}$$

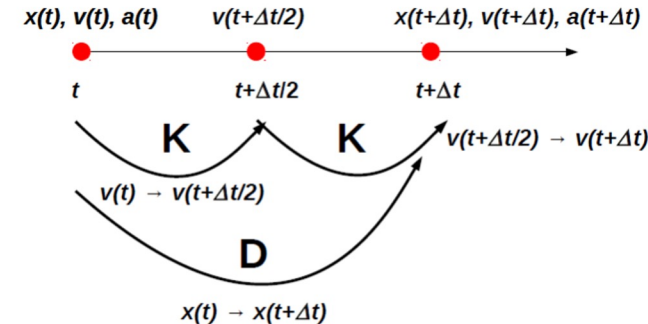
(II) Перешагивание для радиус-вектора частиц (Drift):

$$r_i(t + \Delta t) = r_i(t) + \frac{\Delta t}{2} (\tilde{u}_i(t + \Delta t) + u_i(t))$$

(III) Корректор (Kick):

$$u_i(t + \Delta t) = \frac{u_i(t) + \tilde{u}_i(t + \Delta t)}{2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{du_i(r(t + \Delta t), \tilde{u}_i(t + \Delta t), \tilde{\rho}_i(t + \Delta t))}{dt}$$

$$\rho_i(t + \Delta t) = \frac{\rho_i(t) + \tilde{\rho}_i(t + \Delta t)}{2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d\rho_i(r(t + \Delta t), \tilde{u}_i(t + \Delta t), \tilde{\rho}_i(t + \Delta t))}{dt}$$



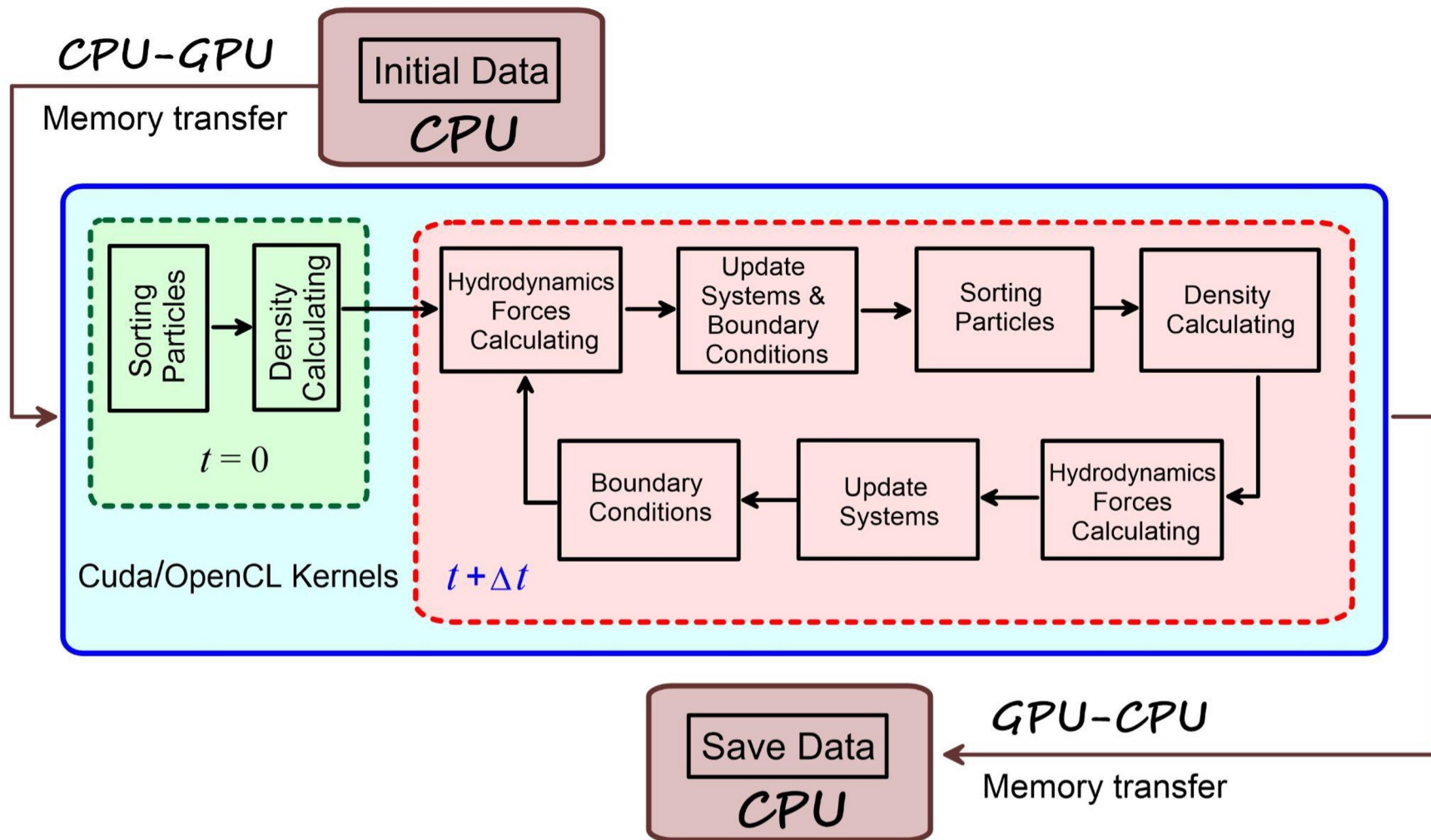
Kick + Drift + Kick (KDK) scheme

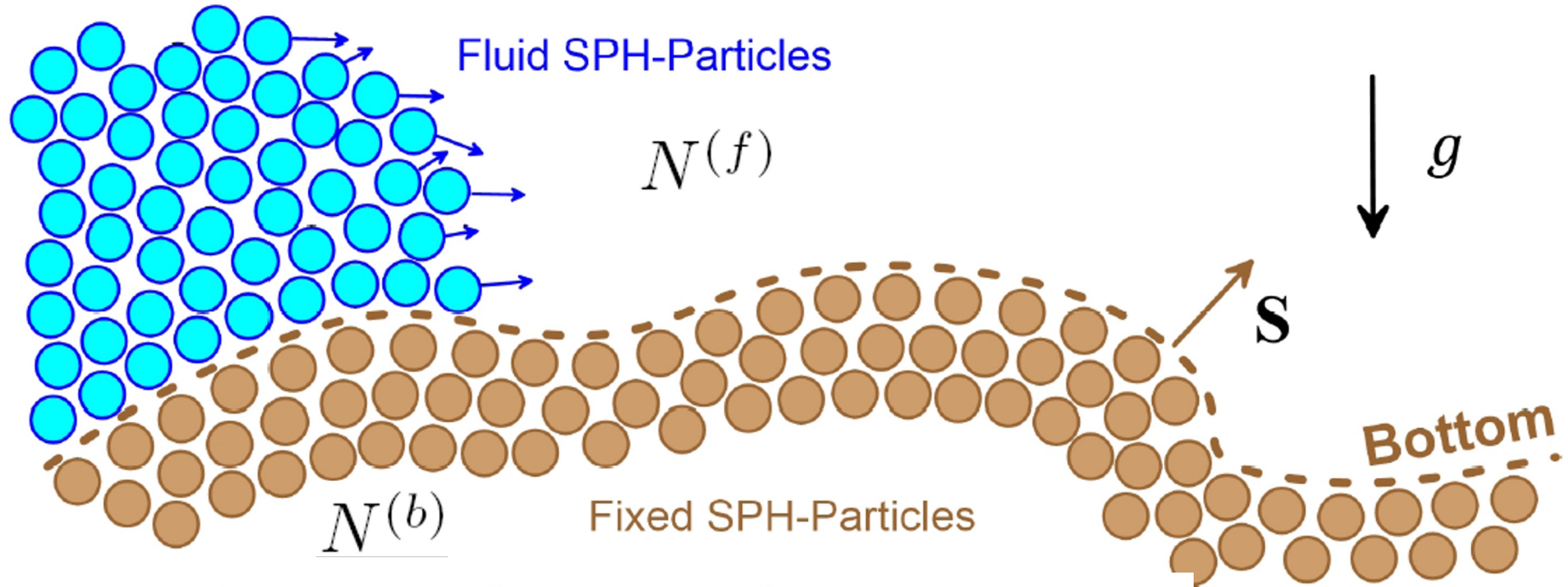
Условие устойчивости

[Monaghan, 1992; 2005]

$$\Delta t = C_{CFL} \min_i \left[\frac{s_{ij}^{min}}{c_{ij}^{max} (1 + 1.2\alpha) + 1.2\beta \mu_{ij}^{max}} \right]$$

$$s_{ij}^{min} = \min_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, c_{ij}^{max} = \max_j c_{ij}, \mu_{ij}^{max} = \max_j \mu_{ij}.$$





$$\mathbf{F}_{ij}^{(rp)} = \begin{cases} D \left[\left(\frac{r_b}{r_{ij}} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{r_b}{r_{ij}} \right)^{\alpha_2} \right] \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}, & \text{if } r_{ij} \leq r_b \\ 0, & \text{if } r_{ij} > r_b \end{cases}$$

Сквозные расчеты без проверки и отбора частиц, которые находятся в непосредственной близости от границы.

Удобные технологии трехмерного твердотельного моделирования с использованием САПР и ГИС для задания ЦМР.

Линейные волны: $\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx + \phi_0)$

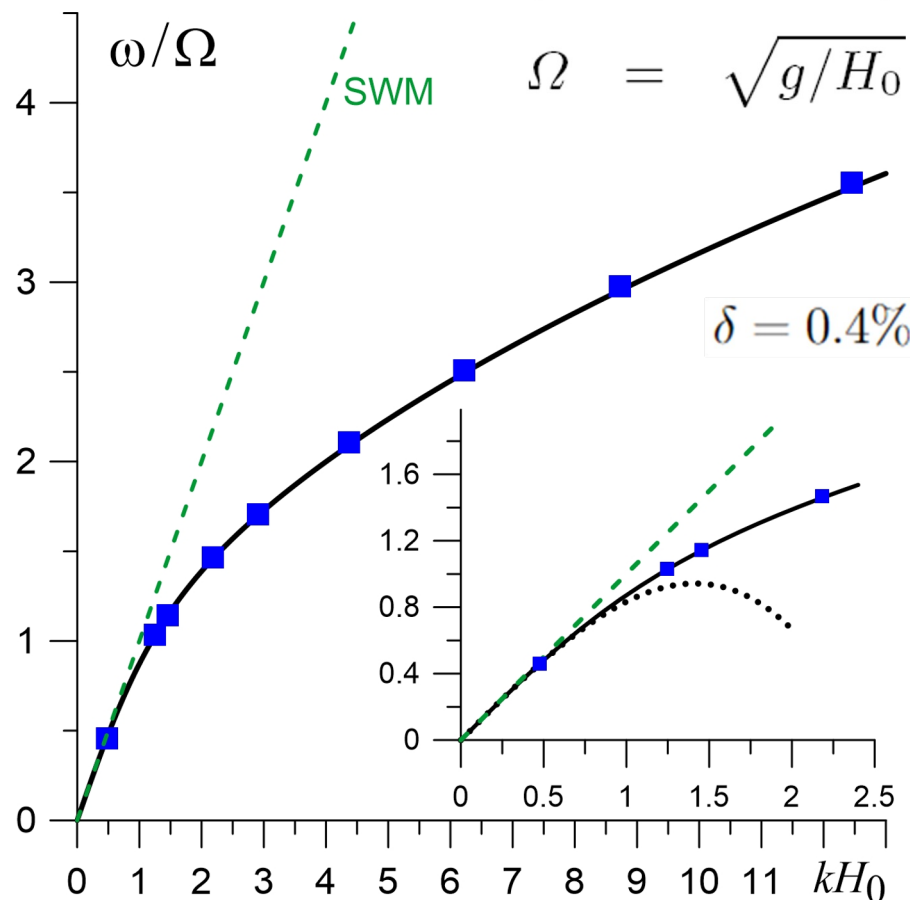
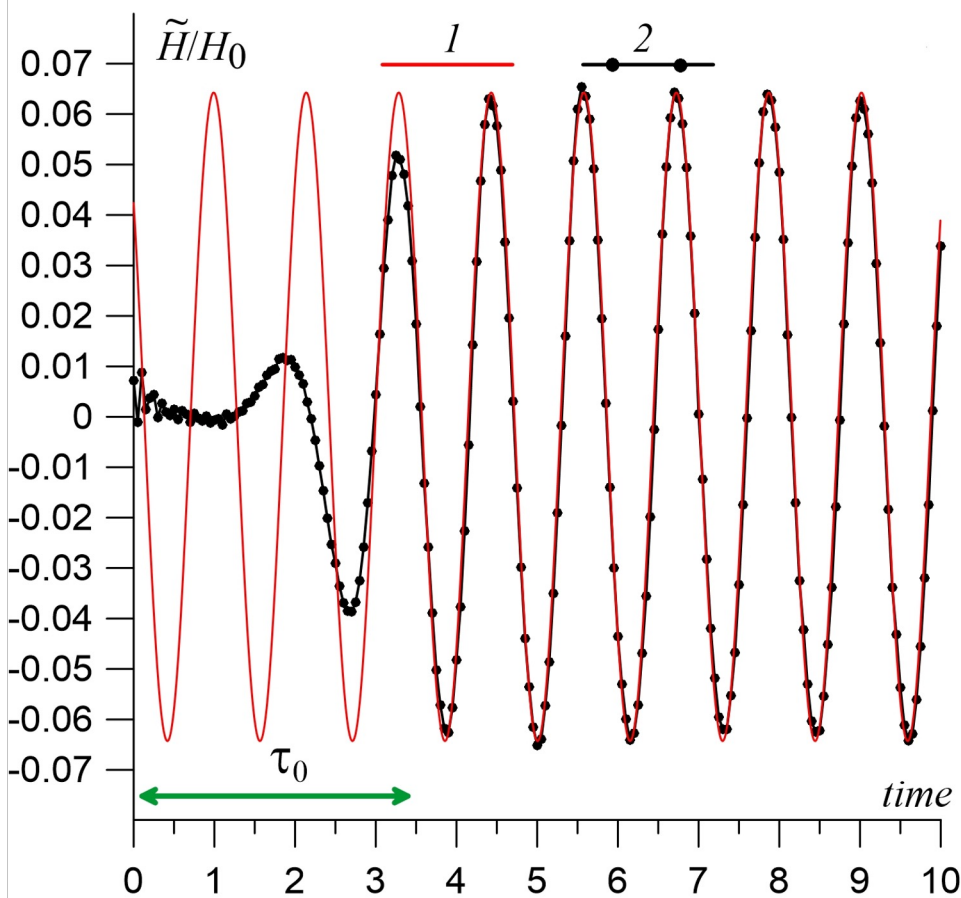
Дисперсионное уравнение ПГВ $\omega = \sqrt{kH_0} \frac{c_0^{(s)}}{H_0} (\tanh(kH_0))^{1/2}$
 $c_0^{(s)} = \sqrt{gH_0} \quad \lambda = 2\pi/k$

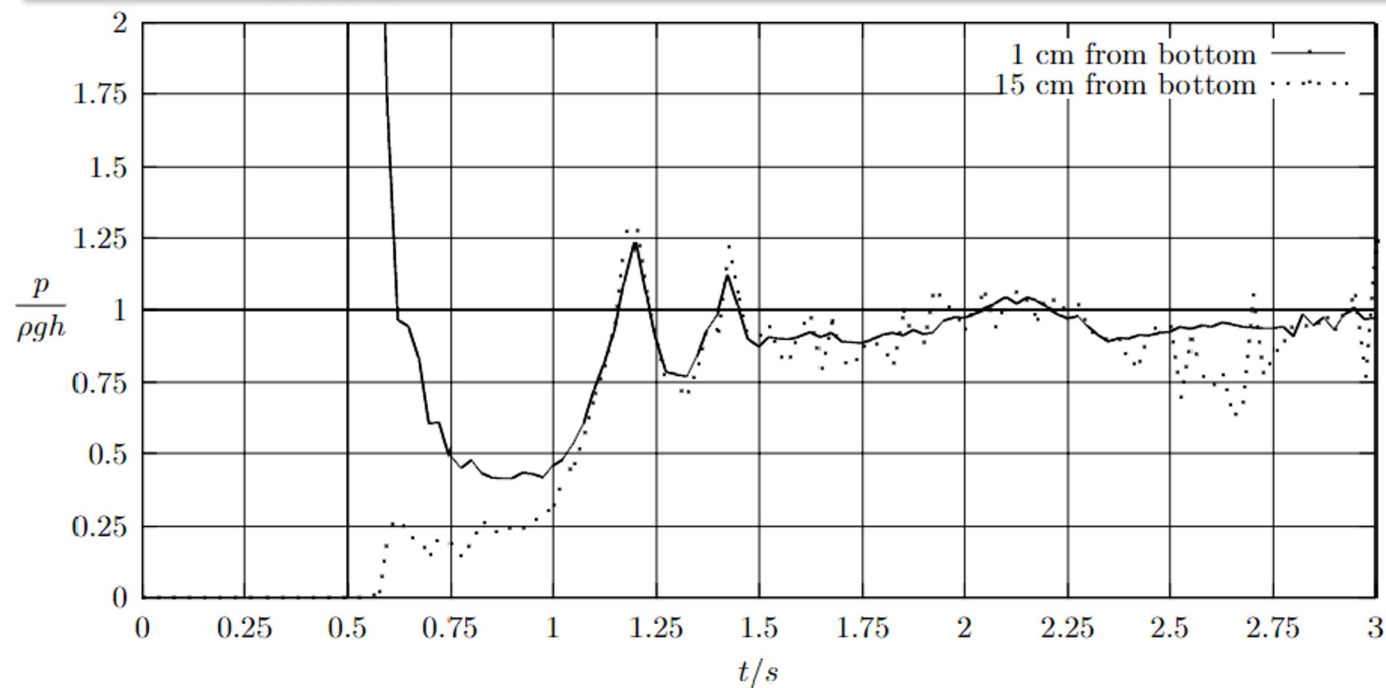
Поршень $\longleftrightarrow$ Точка измерения $\downarrow$

Дисперсионное уравнение в приближении мелкой воды $\omega \simeq kc^{(s)}$

Поршень на левой границе с заданной частотой

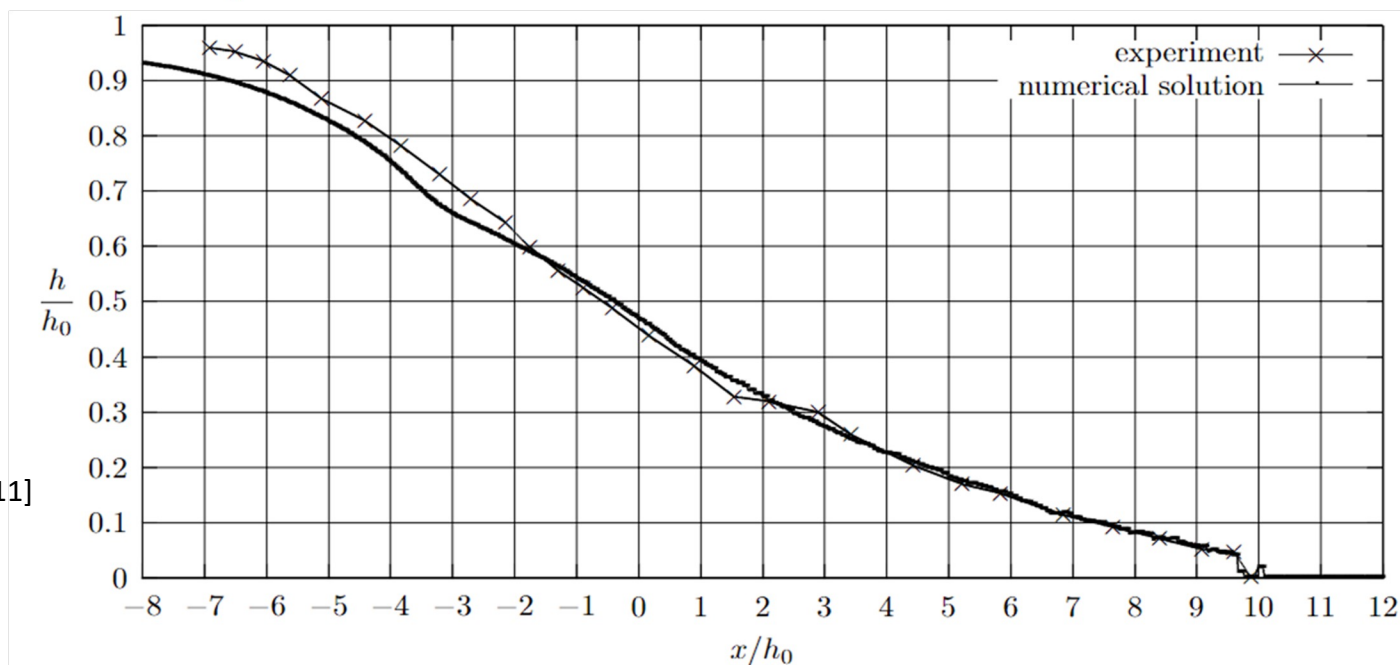
$\omega \simeq kc^{(s)} (1 - (kH_0)^2/6)$



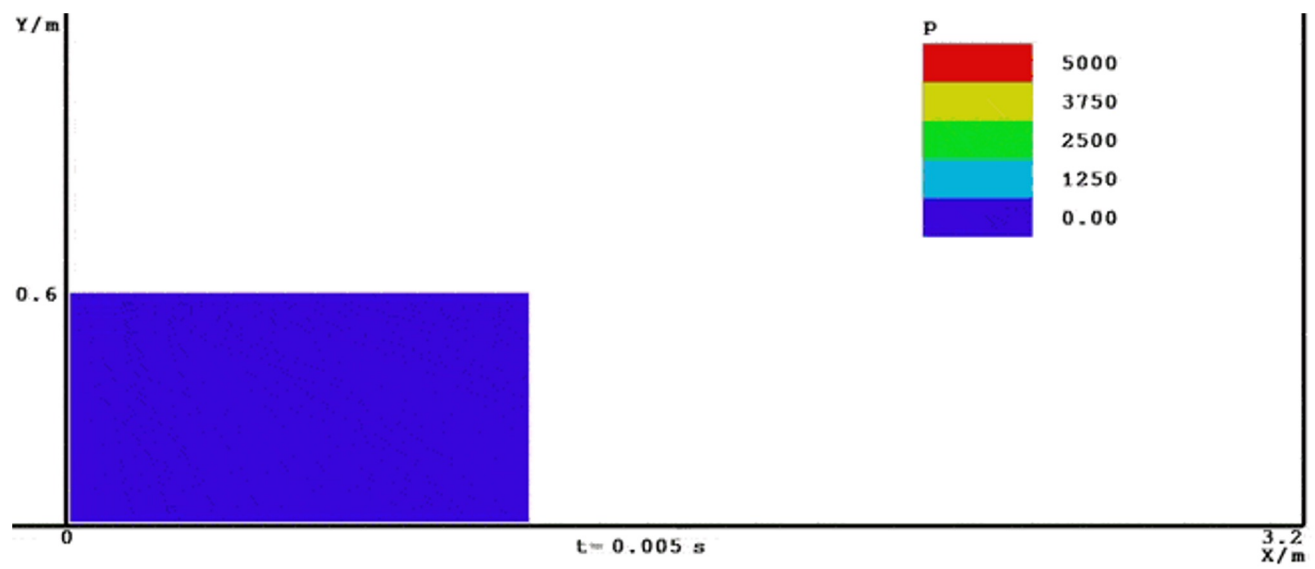
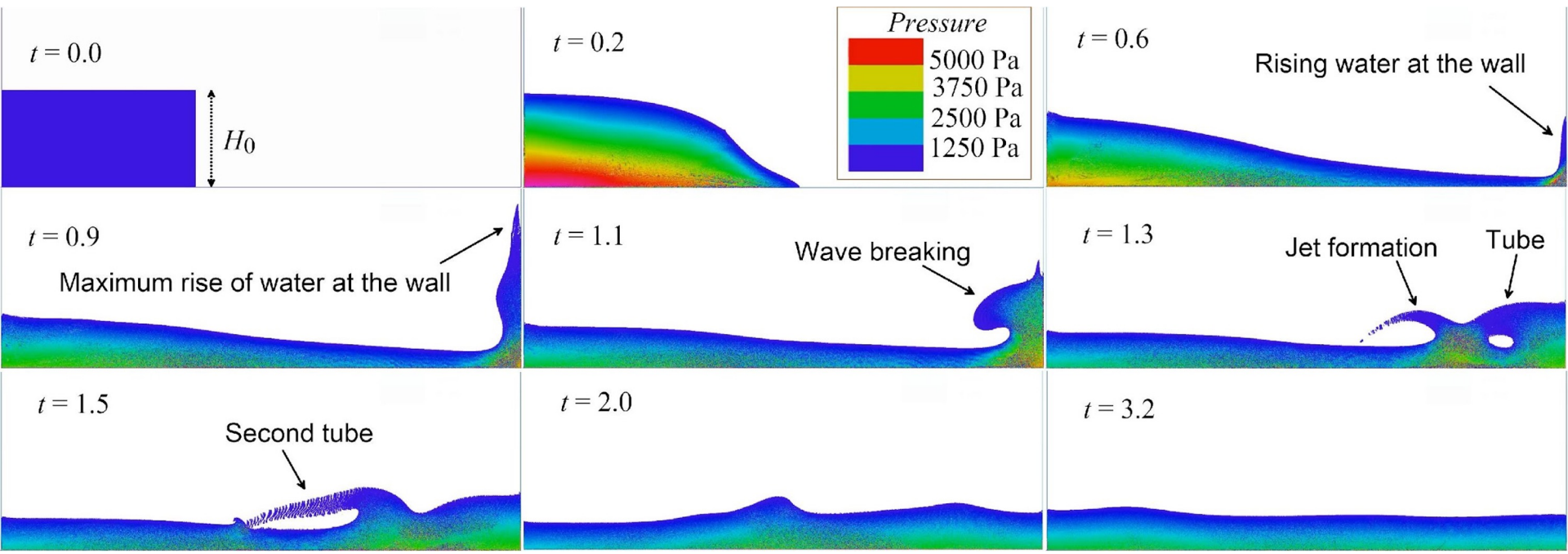


$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

$$\gamma \cong 7$$



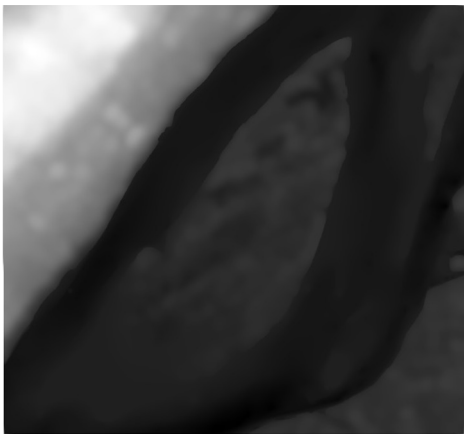
[Ozmen-Cagatay et al., 2011]



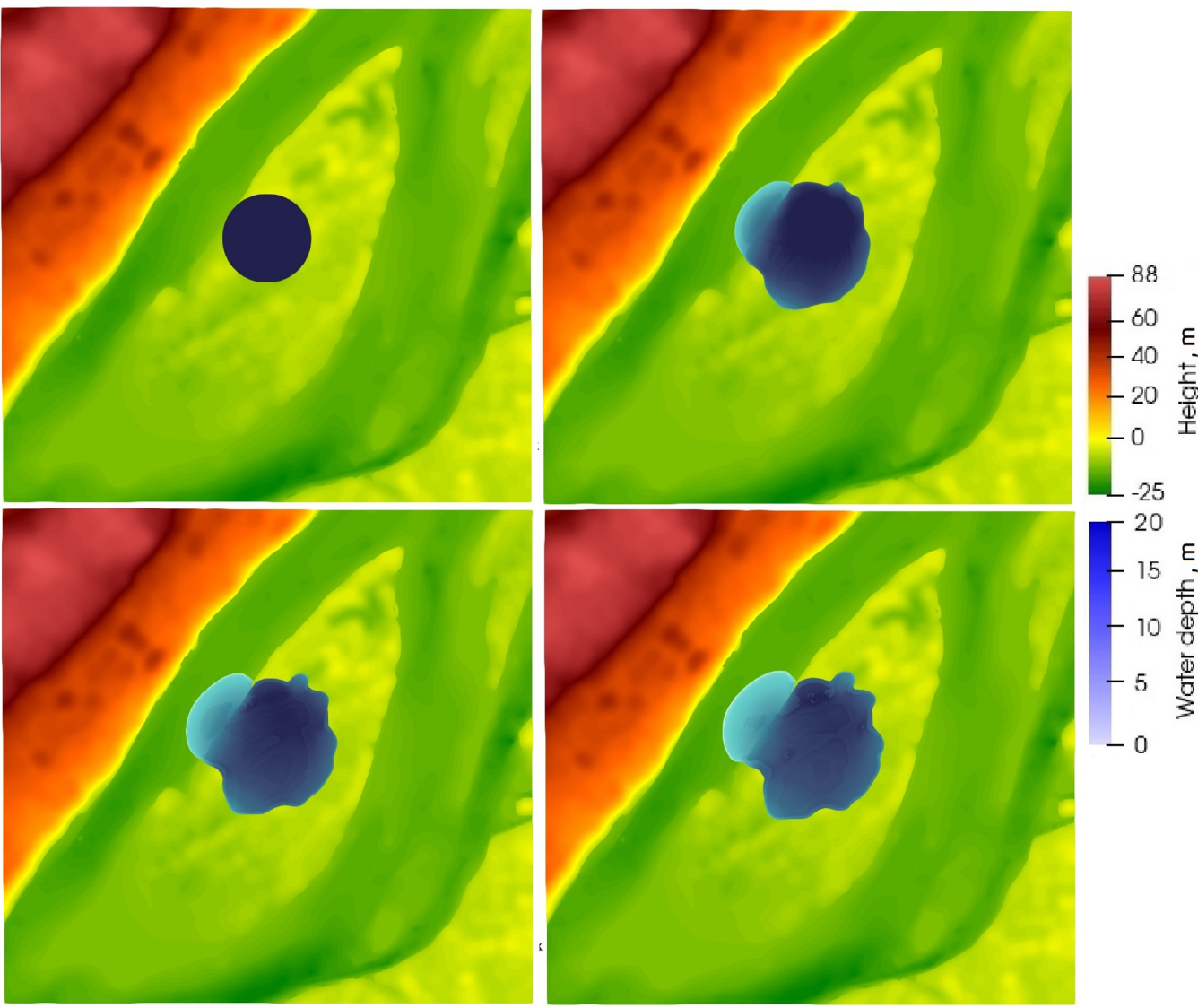
1



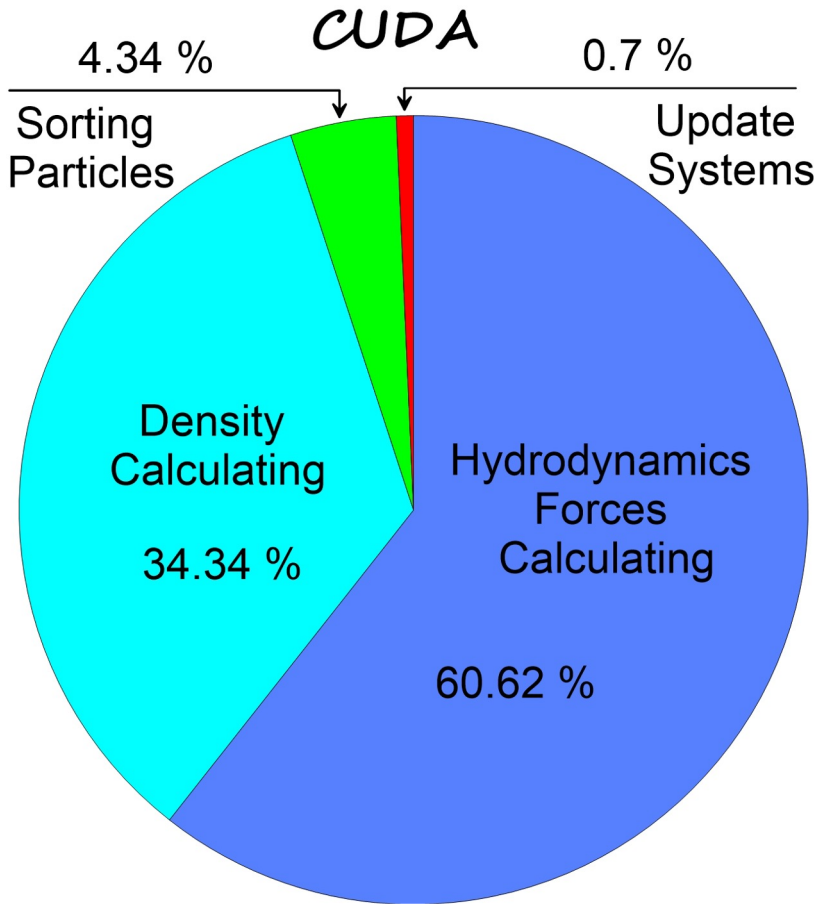
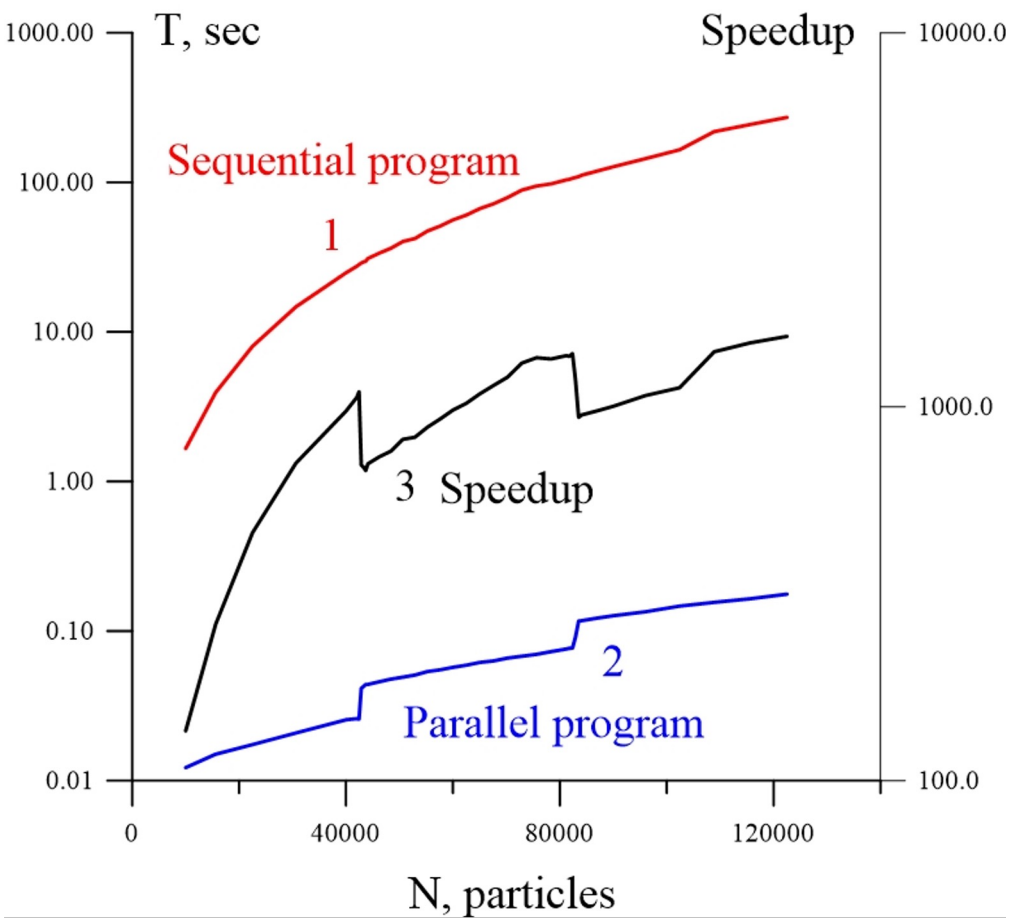
2



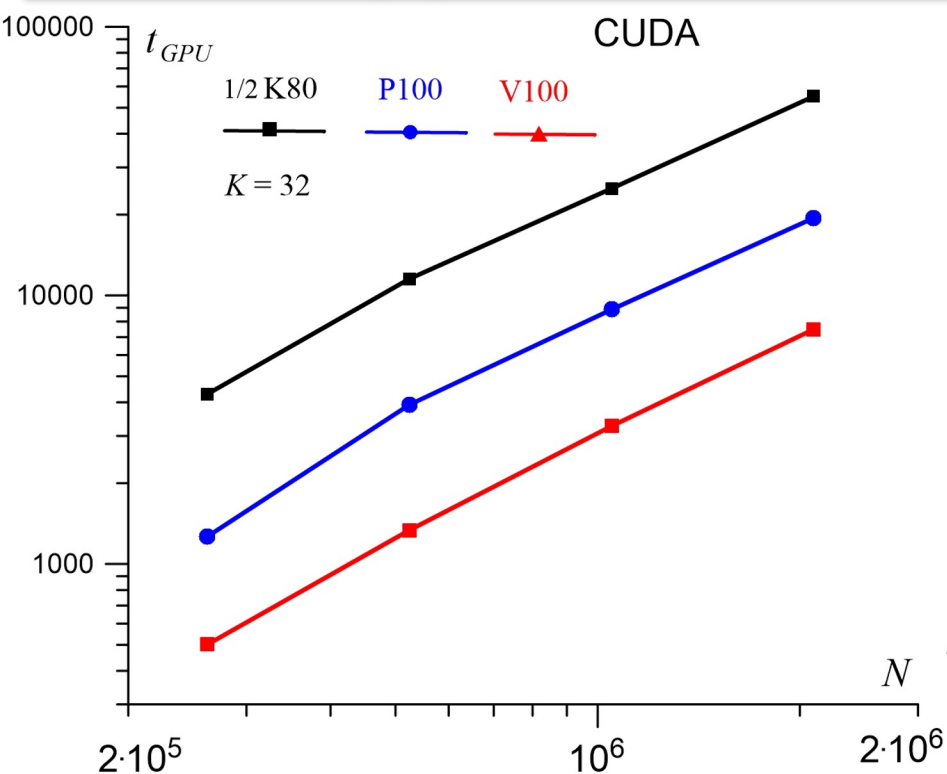
3



Эффективность распараллеливания
численного алгоритма



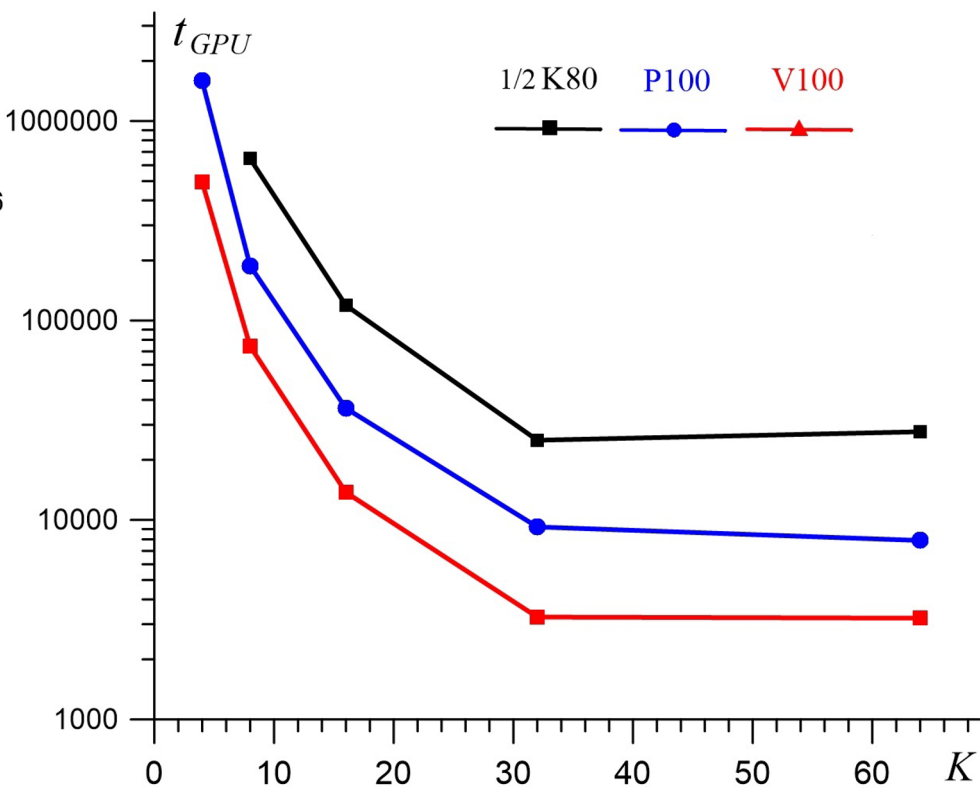
Доля времени выполнения
CUDA-ядер (SP+DC+HFC+US)
SPH алгоритма

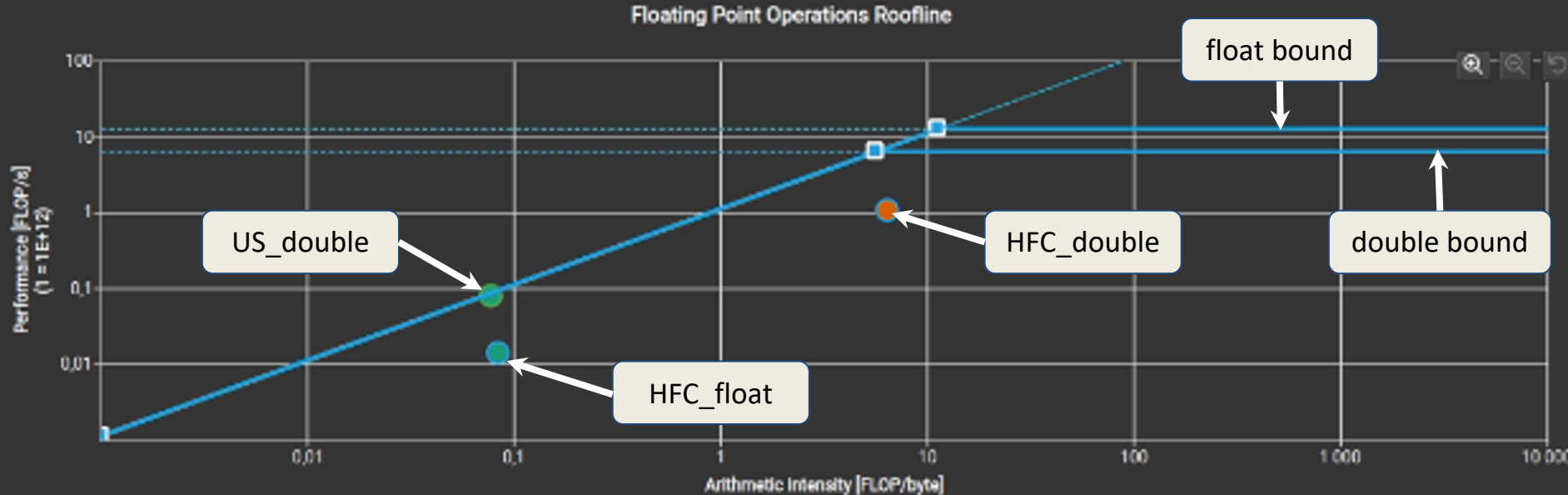
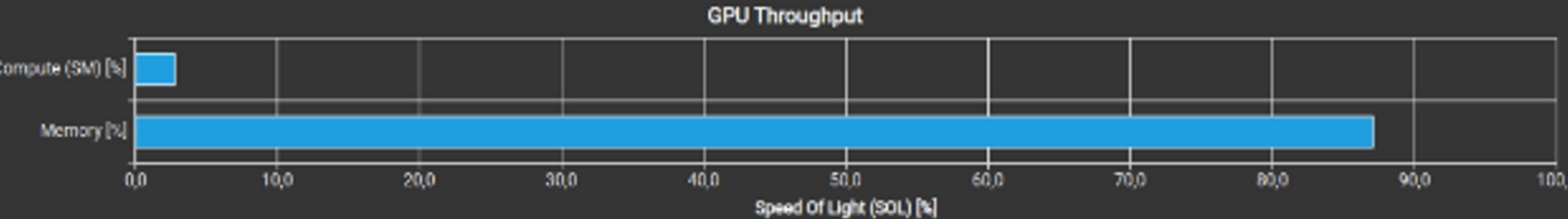
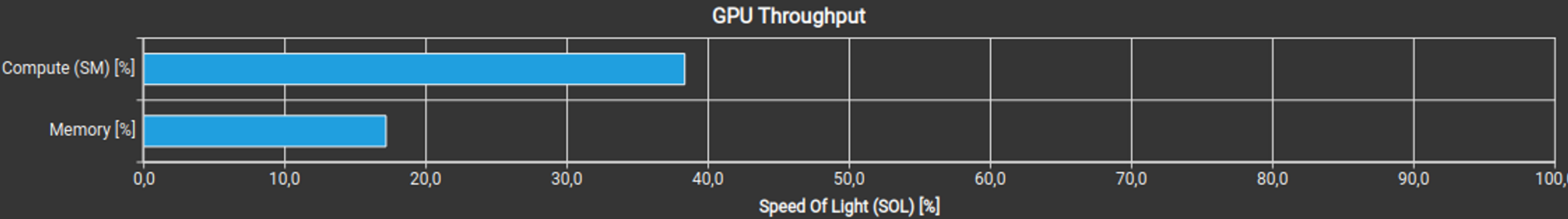


Зависимость времени моделирования от количества частиц

$$K_x = K_y = K_z = K$$

Зависимость времени моделирования от количества разбиений расчетной области на этапе сортировки





- Построены различные варианты численных моделей для расчета динамики жидкости на заданном рельефе местности в SPH подходе.
- Для задания граничных условий на твердой поверхности при 3D движении жидкости используется цифровая модель рельефа местности (ЦМР), как в модели мелкой воды. Поверхности (ЦМР) задаются слоями неподвижных SPH-частиц, что обеспечивает сквозные вычисления.
- Распараллеливание проведено для двух технологий: CUDA для NVIDIA Graphics Processing Units, OpenCL (Open Computing Language), расширяющий область применения разных GPU.
- Тесты: дисперсионные свойства поверхностных гравитационных волн и задача распада дамбы.