

Итерационный решатель с разделением полей и прямой решатель для квазистатического уравнения Био*

С.А. Соловьев¹, В.В. Лисица²

¹ИМ СО РАН

²ИНГГ СО РАН

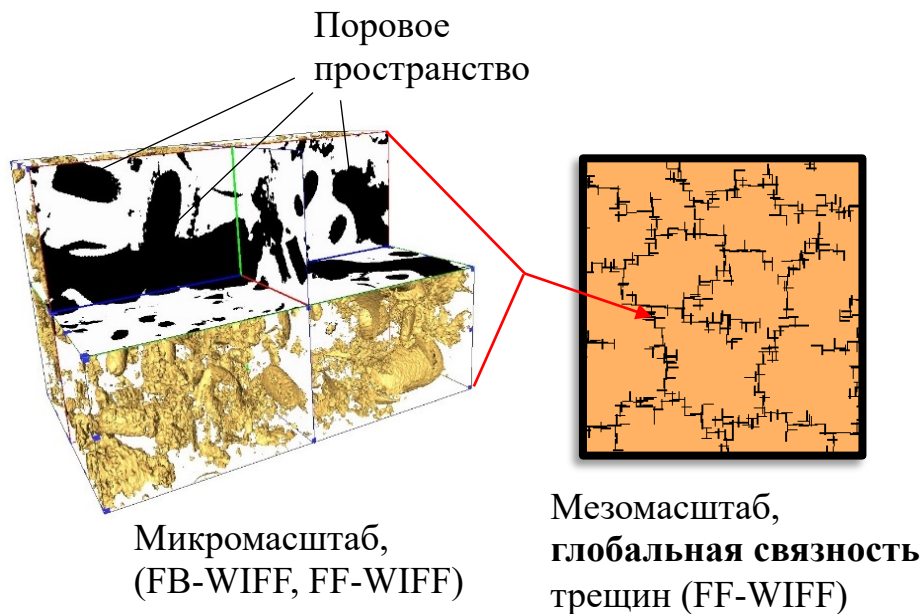
Field-split iterative solver vs direct one for quasi-static Biot equation*

Solovyev S.¹, Lisitsa V.²

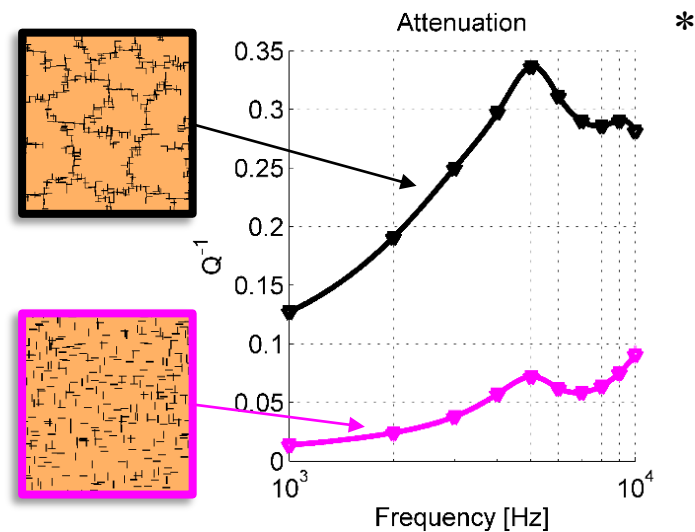
¹IM SB RAS

²IPGG SB RAS

Введение



Влияние связности трещин на затухание



- Для учета детальной структуры трещиноватости при оценке затухания в широком диапазоне частот возникает необходимость разработки **эффективного алгоритма** численного апскейлинга.

Эффективный алгоритм апскейлинга.

- Восстановление эффективных свойств вязкоупругой среды, «эквивалентной» неоднородной пороупругой среде.
- **Эффективный алгоритм** – точный, быстрый, ёмкий по памяти

1. Численное решение уравнения Био

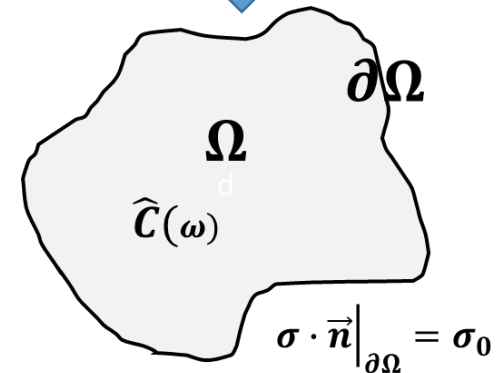
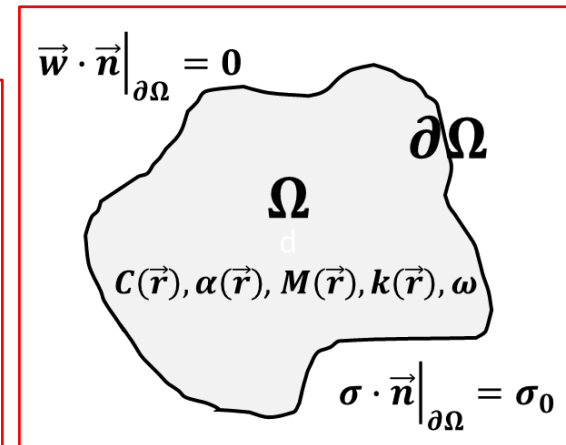
Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0.$$



2. Восстановление эффективного тензора жесткости
3. Оценка затухания и фазовой скорости

Решение уравнения Био.

Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0,$$

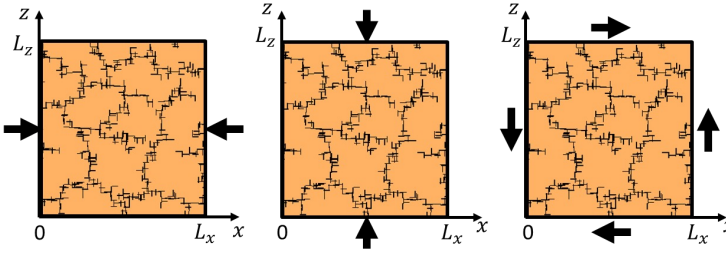
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z = 0.$$

Решение уравнения Био.

Прямоугольная область,
три типа нагрузки



Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

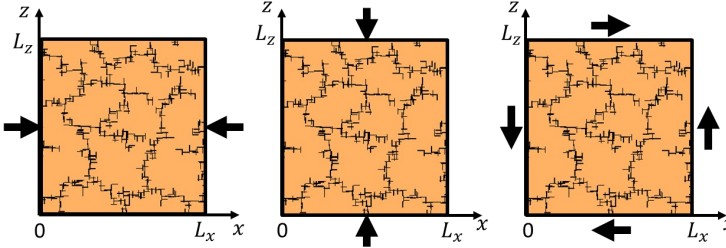
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0,$$

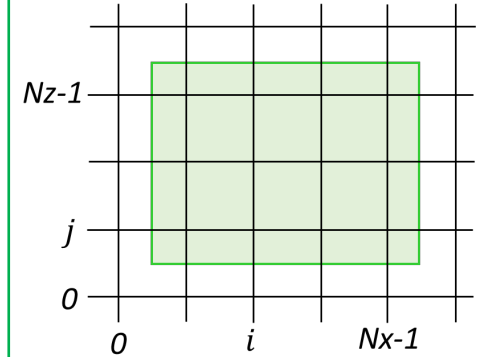
$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0.$$

Решение уравнения Био.

Прямоугольная область,
три типа нагрузки



Прямоугольная сетка



Уравнение БИО

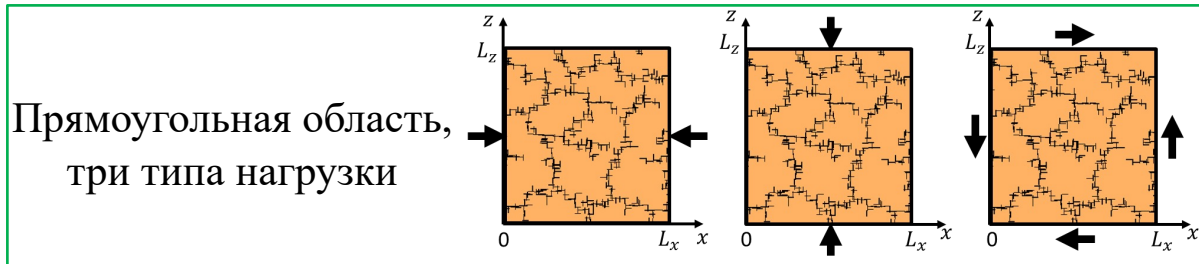
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0.$$

Решение уравнения Био.



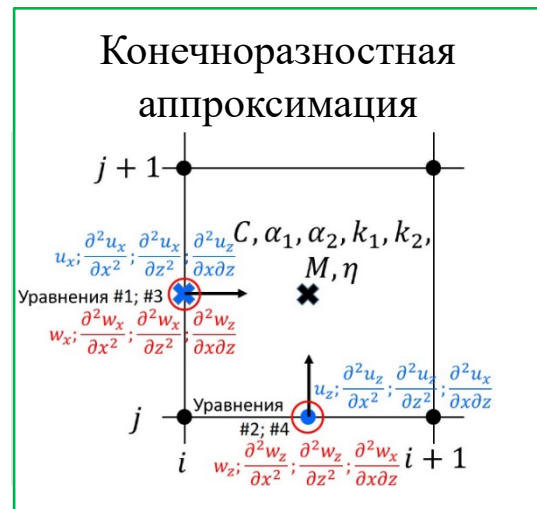
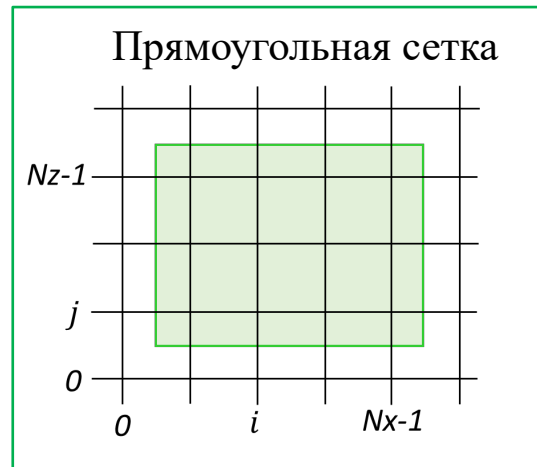
Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

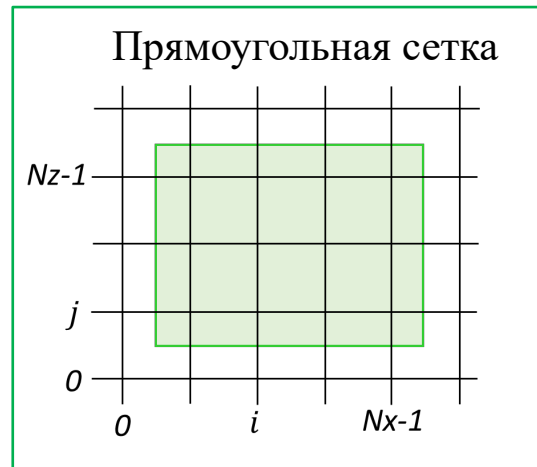
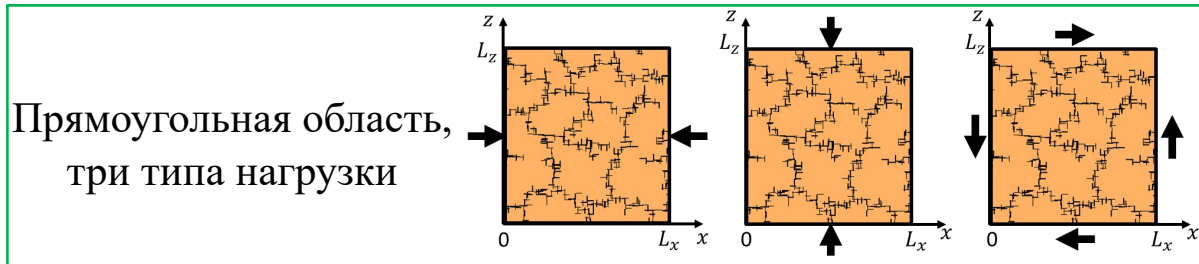
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0.$$



Решение уравнения Био.



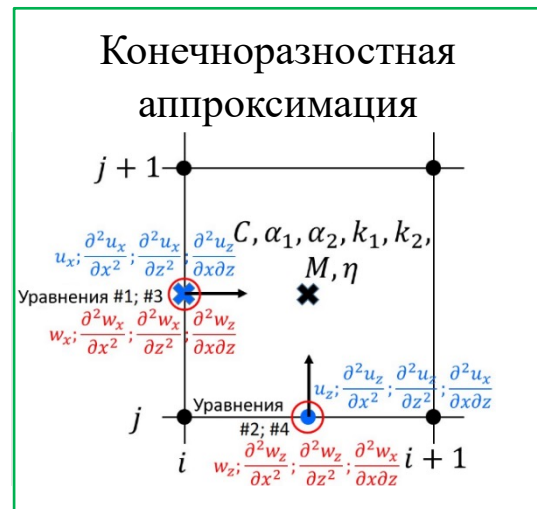
Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0.$$



СЛАУ $Ax=b$

- ✓ Комплексная
- ✓ A не симметричная, не Эрмитова
- ✓ Вырожденная

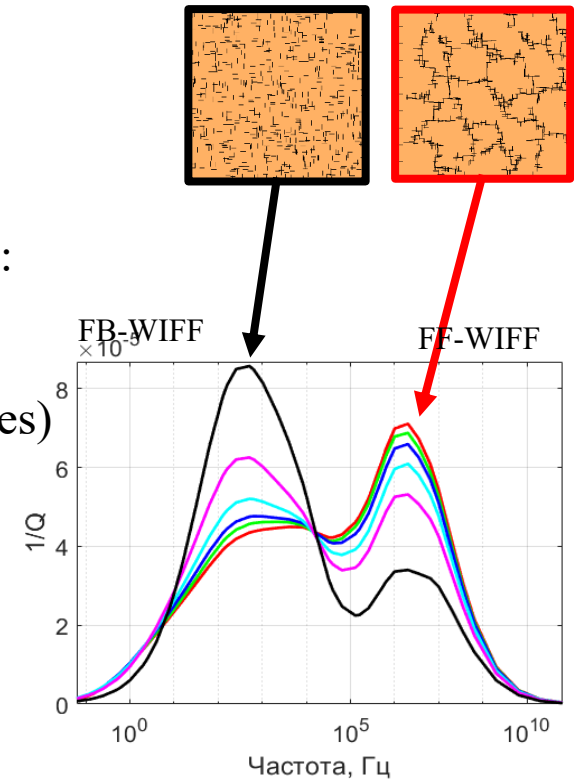
Эффективное решение СЛАУ.

$$\text{СЛАУ } Ax=b$$

- ✓ Комплексная
- ✓ Не симметричная, не Эрмитова
- ✓ Вырожденная

1. **Прямые методы:** точные, надежные, быстрые для 2D задач:

- ✓ 500x500 узлов, 30 частот, 6 моделей трещиноватости
- ✓ ~ **30мин.** на Intel Xeon E5-2690 v2 @ 3,00 ГГц (20 cores)



Эффективное решение СЛАУ.

СЛАУ $Ax=b$

- ✓ Комплексная
- ✓ A не симметричная, не Эрмитова
- ✓ Вырожденная

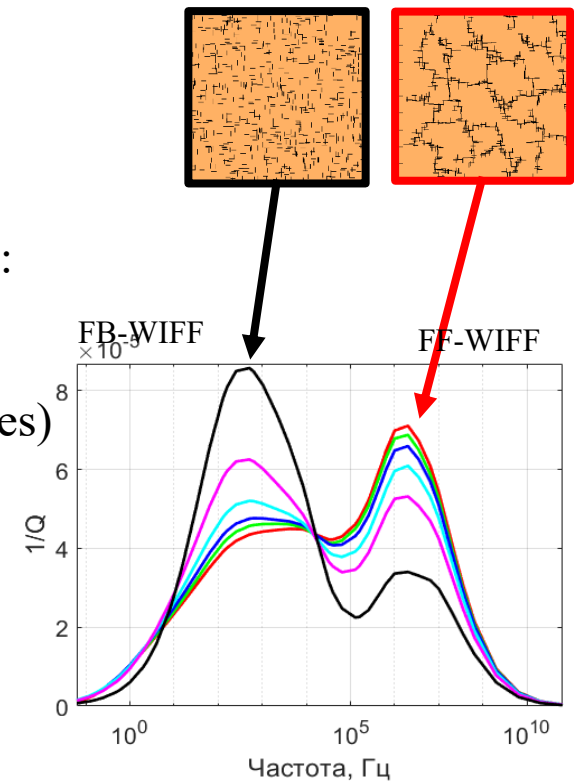
1. **Прямые методы:** точные, надежные, быстрые для 2D задач:

- ✓ 500x500 узлов, 30 частот, 6 моделей трещиноватости
- ✓ ~ **30мин.** на Intel Xeon E5-2690 v2 @ 3,00 ГГц (20 cores)

2. **Итерационные методы** для 3D моделей:

1. **Бисопряженные градиенты**

2. Предобуславливатель: **метод разделения полей**



Бисопряженные градиенты с перезапуском

задаем x_0

задаем $j_{restart}$

$$r_0 := \hat{b} - \hat{A}x_0$$

$$p_0 := r_0$$

Цикл $j = 0, 1, \dots$

$$\alpha_j := \frac{(r_j, r_0^*)}{(\hat{A}p_j, r_0^*)}$$

$$s_j := r_j - \alpha_j \hat{A}p_j$$

$$\omega_j := \frac{(\hat{A}s_j, s_j)}{(\hat{A}s_j, \hat{A}s_j)}$$

$$x_{j+1} := x_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$$

$$r_{j+1} := s_j + \omega_j \hat{A}s_j$$

Если j кратно $j_{restart}$ то $r_{j+1} := \hat{b} - \hat{A}x_{j+1}$

$$\beta_j := \frac{(r_{j+1}, r_0^*)}{(r_j, r_0^*)} \frac{\alpha_j}{\omega_j}$$

$$p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j \hat{A}p_j)$$

Конец цикла

1. Точное вычисление невязки через заданное кол-во шагов
2. Критерий останова – установление изменения эффективного тензора
3. Использование предобуславливателя B (Метод разделения полей), $\hat{A} = B^{-1}A$

Метод разделения полей

Уравнение БИО

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0$$

$$\sigma \cdot \vec{n} \Big|_{\partial \Omega} = \vec{\sigma}_0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

$$A \quad x = b$$

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Метод разделения полей

Уравнение БИО

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \rho \frac{\eta}{k} w_x \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \rho \frac{\eta}{k} w_z \square 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \sigma \cdot \vec{n} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{\sigma}_0 \\
 \vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0
 \end{array}$$

$$\mathbf{A} \quad x = b \\
 \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Предобуславливатель методом разделения полей

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \rho \frac{\eta}{k} w_x \square 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \rho \frac{\eta}{k} w_z \square 0
 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = B^{-1} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} \quad x = y \\
 \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Метод разделения полей

Предобуславливатель методом разделения полей

$$\hat{A} = B^{-1}A$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0$$

$$B \quad x = y$$

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Метод разделения полей

Предобуславливатель методом разделения полей

$$\hat{A} = B^{-1}A$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \square \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \square \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} \square C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \square \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \square$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_x \square 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \square \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i \omega \frac{\eta}{k} w_z \square 0$$

$$B \quad x = y$$

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Алгоритм решения СЛАУ $Bx = y$:

- Решаем $A_0 x_0 = y_0$ (на текущий момент обращение прямым способом)
- Пересчет $y_3 = y_3 - A_2 x_0$
- Решаем $A_3 x_3 = y_3$ (на текущий момент обращение прямым способом)

Численные эксперименты, память.

Сравнение **прямого** и **итерационного** решателей.

1. Сходимость предложенного итерационного алгоритма
2. Число арифметических операций (Флоп) и абсолютное время решения
3. Количество используемой памяти

Объем оперативной памяти (G) для разных подходов.

Задача, №	1	2	3	4
Размер сетки $n=n_x=n_z$	500	1000	2000	4000
Прямой	4	18	83	>512
Итерационный	2	9	41	190

- Число итераций не зависит от размера задачи и равно **4**
- Коэффициент увеличения памяти $\times 4 \dots \times 5$
- Самая большая задача 4000^2 не решена прямым методом (нехватка памяти)

Численные эксперименты, время.

Число арифметических операций (GFLOPS), общее время решения, OMP-масштабируемость разных подходов.

Задача, №		1	2	3	4	
Прямой	GFLOPS	4	18	83	>512	
	Время, сек;	1 OMP	42,9	297,3	2498,9	Н/Д
		16 OMP	7,5	41,5	276,7	Н/Д
	отношение	1/16 OMP	x5,7	x7,2	x9,0	Н/Д
Итерационный	GFLOPS	2	9	41	190	
	Время, сек;	1 OMP	34,2	177,2	1101,3	9173,0
		16 OMP	16,2	68,8	319,0	1654,4
	отношение	1/16 OMP	x2,1	x2,6	x3,5	x5,5

- Число Флоп для факторизации увеличивается как $\times 8 \dots \times 11$
- На небольших задачах прямой подход выигрывает за счет хорошей масштабируемости

Заключение

Сравнение общего времени решения (16 ОМР) для разных подходов.

Задача, №	1	2	3	4
Прямой	7,5	41,5	276,7	Н/Д
Итерационный	16,2	68,8	319,0	1654,4
Отношение (прямой/итер.)	x0,5	x0,6	x0,9	Н/Д

Предложенный итерационный решатель:

- 1. Сходится** при использовании предобуславливателя разделением полей
- 2. Скорость сходимости не зависит** от размера задачи и временной частоты
3. Может решать **большие задачи** чем прямой.
4. На больших задачах имеет **преимущество** перед прямым.

Спасибо за внимание!

Backup

Обращения матрицы, соответствующей уравнению упругости.

Сопряженные градиенты с предобуславливателем M

set x_0

$$r_0 := b - Ax_0$$

$$z_0 := M^{-1}r_0$$

$$p_0 := z_0$$

Loop $j = 0, 1, \dots$

$$a_j := \frac{(r_j, z_j)}{(Ap_j, p_j)}$$

$$x_{j+1} := x_j + a_j p_j$$

$$r_{j+1} := r_j - a_j Ap_j$$

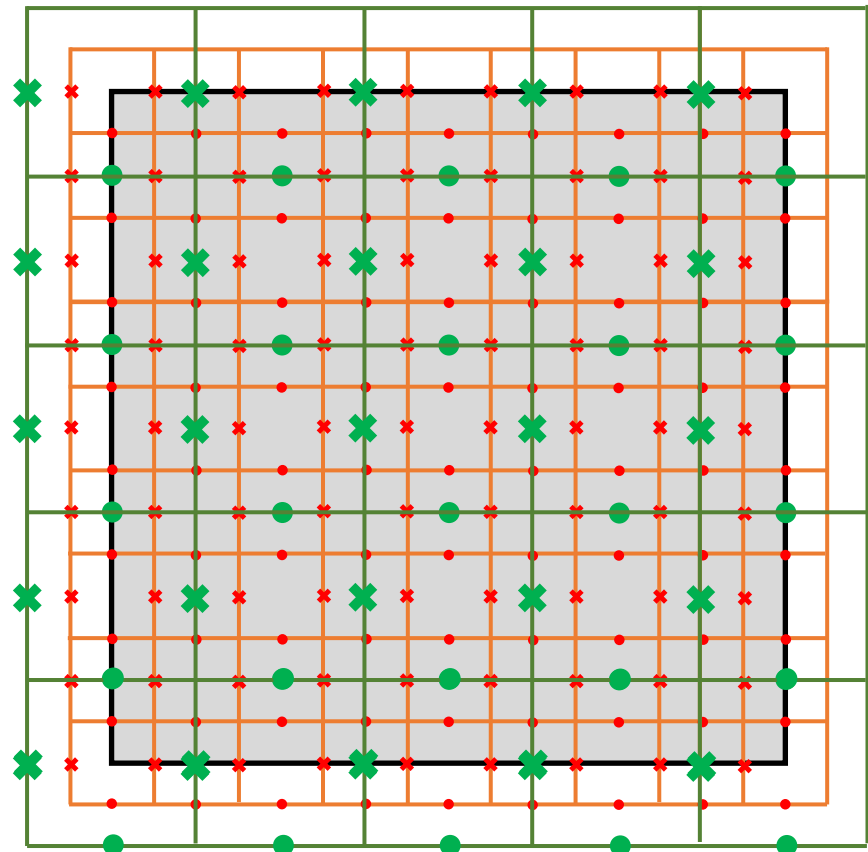
$$z_{j+1} := M^{-1}r_{j+1}$$

$$\beta_j := \frac{(r_{j+1}, z_{j+1})}{(r_j, z_j)}$$

$$p_{j+1} := z_{j+1} + \beta_j p_j$$

End of Loop

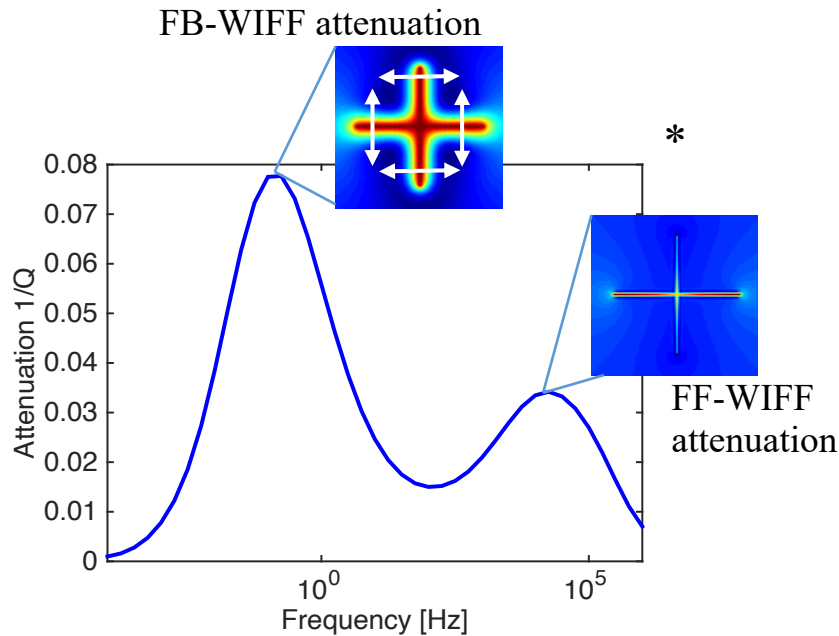
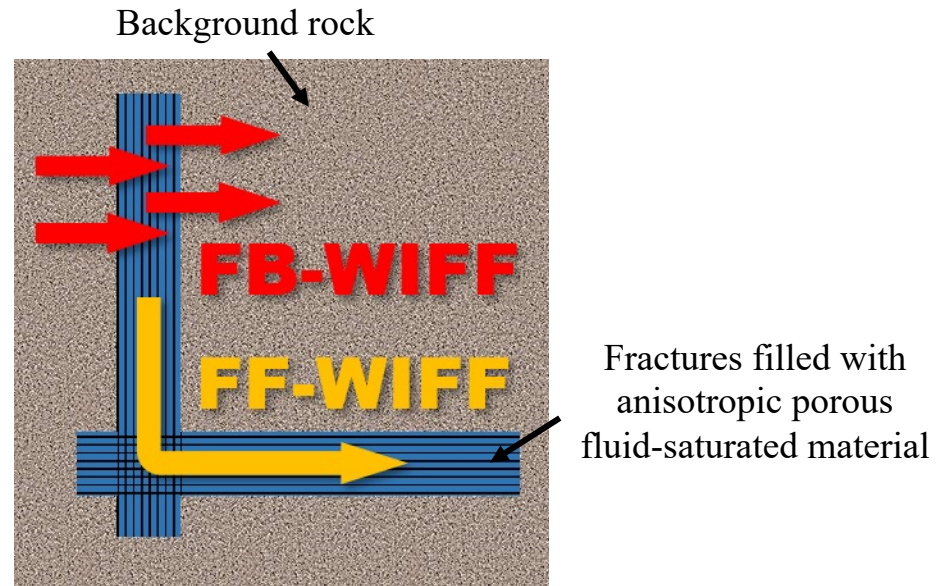
Многосеточный на вложенных сдвинутых сетках



Introduction

Wave-induced fluid flow (WIFF):

- Fracture-to-background;
- Fracture-to-fracture.



- Frequency-dependent seismic attenuation can serve as indicator of reservoir transport properties and fluid mobility.