

Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

ДИАГНОАЛИЗАЦИЯ И КАНОНИЗАЦИЯ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Ватутин Э.И., Белышев А.Д., Никитина Н.Н., Манзюк М.О.,
Альбертьян А.М., Курочкин И.И., Крипачев А.В., Пыхтин А.И.

Москва, МГУ, 2023



Понятие ЛК и ДЛК

$$A = \|a_{ij}\|$$

$$i, j = \overline{1, N}$$

$$N = |U|$$

$$U = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \neq k: (a_{ij} \neq a_{ik}) \wedge (a_{ji} \neq a_{ki})$$

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j: (a_{ii} \neq a_{jj}) \wedge (a_{N-i+1, N-i+1} \neq a_{N-j+1, N-j+1})$$

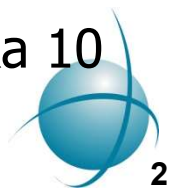
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	9	4	3	6	7	5	0	8
2	9	3	1	7	0	5	8	4	6
3	4	1	2	8	7	9	6	5	0
4	3	5	9	2	1	8	0	6	7
5	6	4	8	1	2	0	9	7	3
6	5	8	7	0	3	2	1	9	4
7	8	6	0	9	4	1	2	3	5
8	7	0	5	6	9	3	4	1	2
9	0	7	6	5	8	4	3	2	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2	4	9	0	6	5	1	3	8
8	3	6	7	5	9	0	2	4	1
2	6	8	5	1	7	4	0	9	3
5	8	9	1	7	0	3	4	6	2
9	4	1	2	8	3	7	6	0	5
4	7	5	6	9	1	8	3	2	0
3	0	7	8	2	4	1	9	5	6
6	5	0	4	3	2	9	8	1	7
1	9	3	0	6	8	2	5	7	4

Нормализованный ЛК порядка 10 Нормализованный ДЛК порядка 10

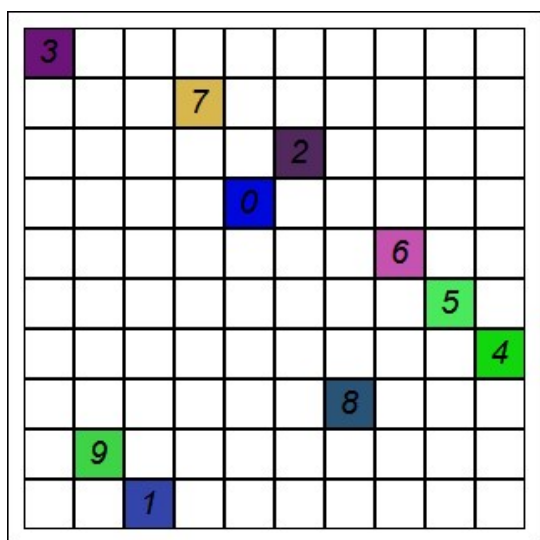
$$N! \times (N-1)!$$

$$(N-1)!$$

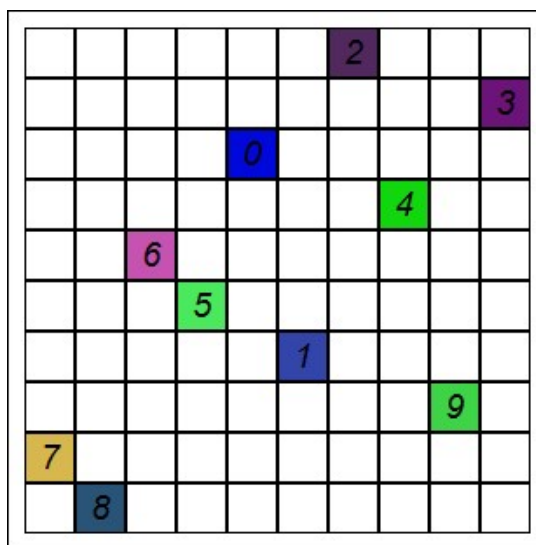


Основные понятия

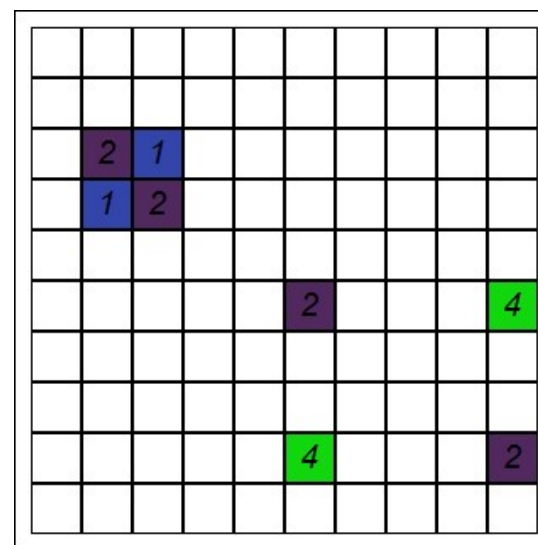
- полные и частичные инварианты
- примеры инвариантов: число трансверсалей различного типа, число интеркалятов, число ОЛК/ОДЛК
- каноническая форма (КФ)



Пример
диагональной
трансверсали



Пример
трансверсали
общего вида

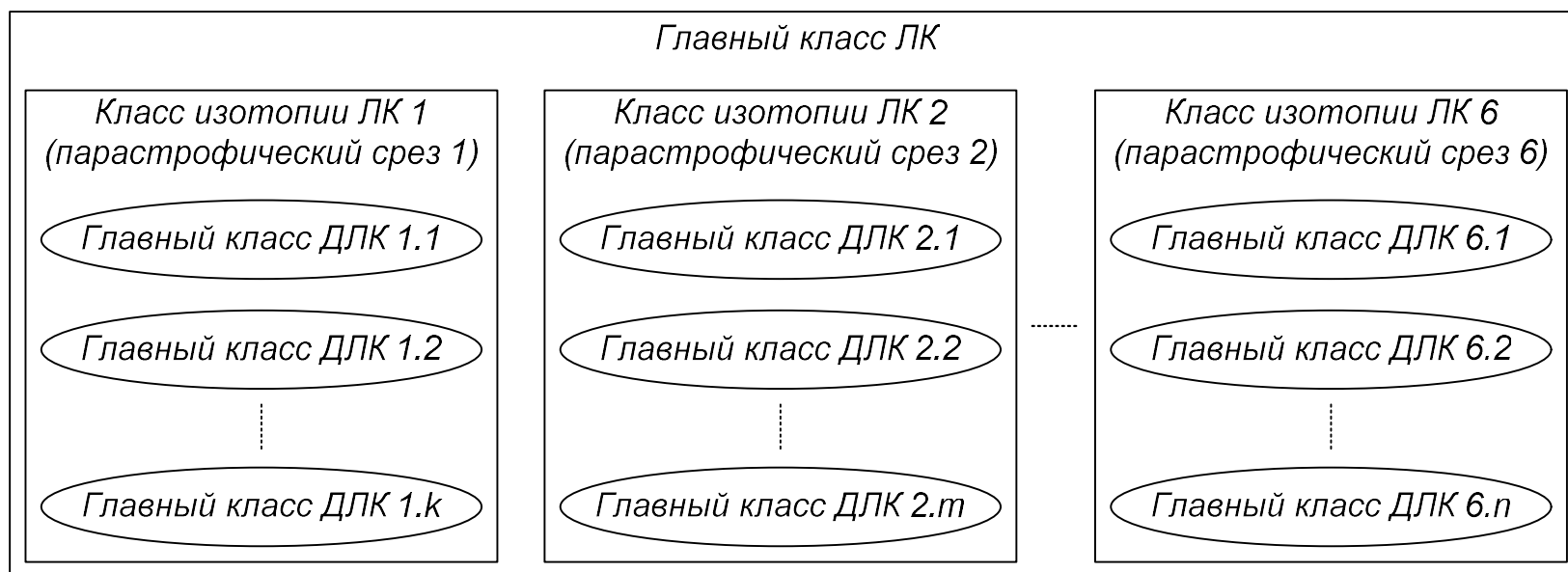


Пример интеркалятов



Вложение классов изоморфизма ЛК и ДЛК

- класс изотопии ЛК (перестановка строк и столбцов, перенумерация значений элементов)
- главный класс ЛК (совокупность максимум 6 классов изотопии в комбинации с парастрофическими преобразованиями)
- главный класс ДЛК (комбинация преобразований $M1 \times M2 \times \text{Повороты} \times \text{Отражения} \times \text{Транспонирования}$)
- и др. (не интересны в контексте тематики данного доклада)



- справедливо для ЛК/ДЛК с тривиальной группой автоморфизмов



Инварианты классов изоморфизма ЛК и ДЛК

Частичные инварианты:

- главный класс ЛК – число интеркалятов, число трансверсалей общего вида, число ОЛК, ...
- главный класс ДЛК – число диагональных трансверсалей, число ОДЛК, ...

Полные инварианты

- главный класс ДЛК – КФ ДЛК (находится относительно легко в вычислительном плане)
- главный класс ЛК – **КФ ЛК** (нахождение затруднительно, $t \sim O((N!)^2)$, **лексикографически минимальная КФ ДЛК одного из вложенных главных классов ДЛК** (в случае ее существования))



Понятие диагонализации

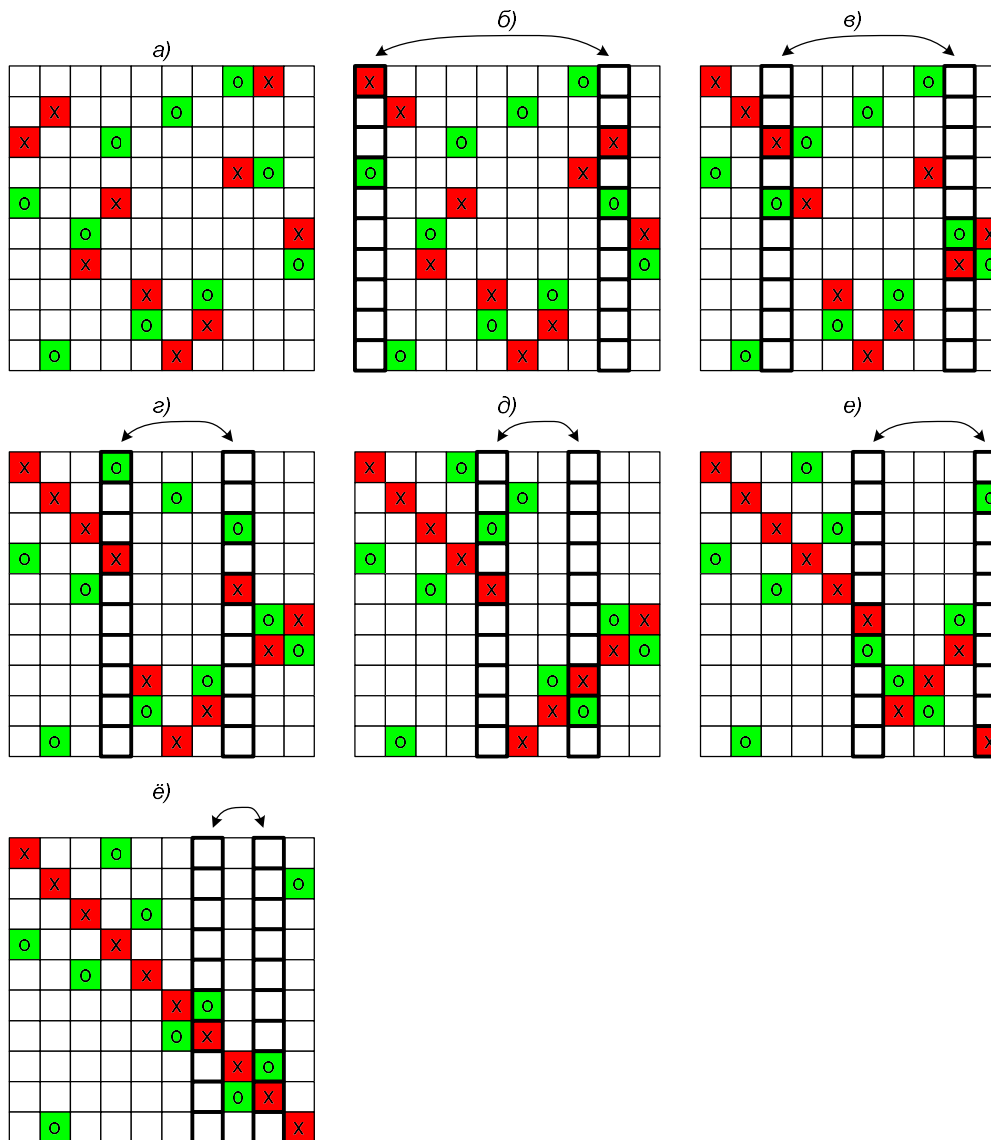
Целенаправленная перестановка строк и столбцов ЛК (не всех $(N!)^2$, а лишь малой их части) с целью получения ДЛК.

Схематичное описание процедуры диагонализации:

1. Нахождение пары симметрично расположенных по Брауну трансверсалей T_i и T_j в ЛК A .
2. Установка трансверсали T_i на главную диагональ путем целенаправленной перестановки столбцов в ЛК A с получением ЛК A' и трансверсали T_j' .
3. Установка трансверсали T_j' на побочную диагональ ЛК A' путем целенаправленной перестановки строк и столбцов с получением результирующего ДЛК A'' .



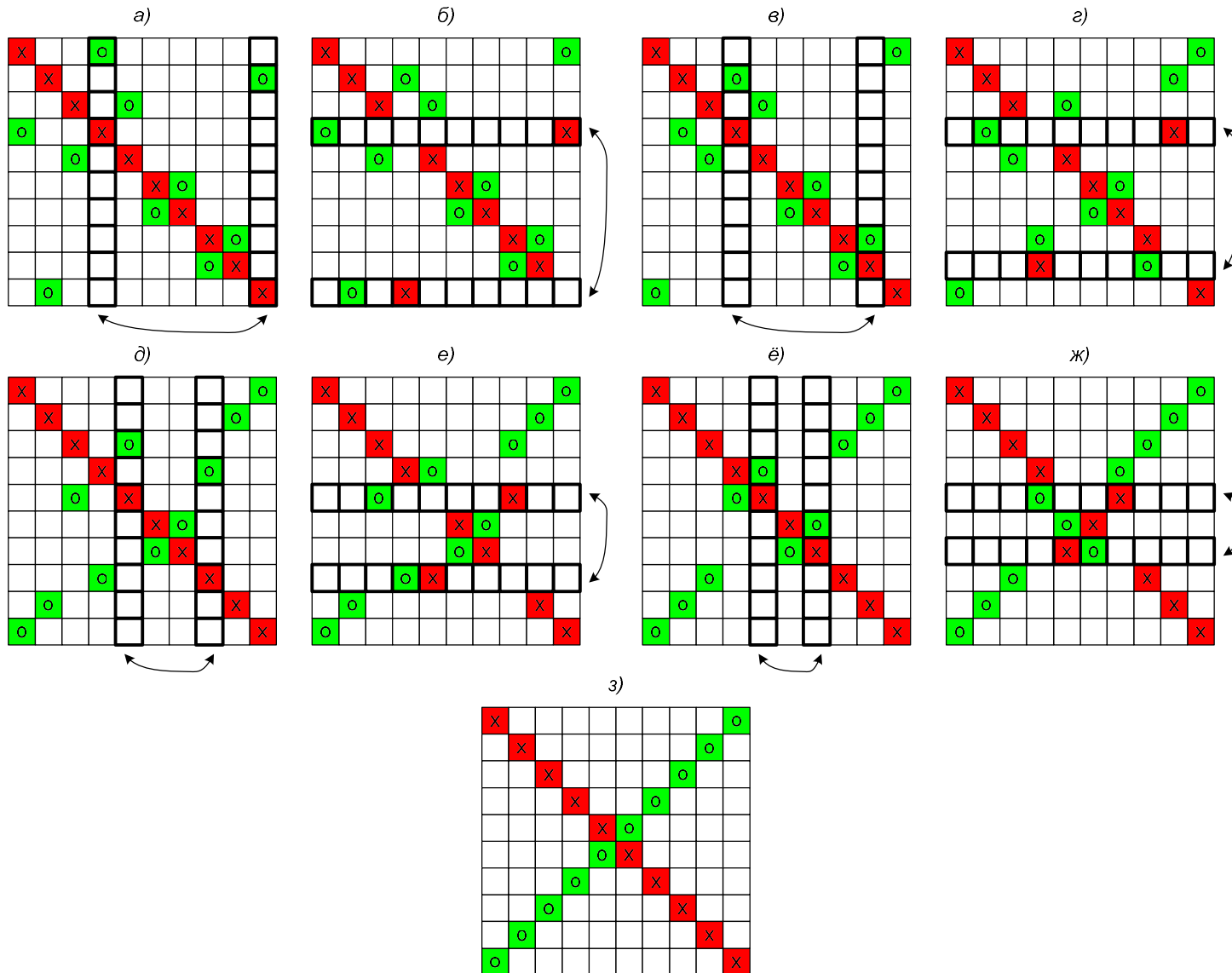
Пример диагонализации: получение главной диагонали



Видна ли симметрия в расположении трансверселей? ☺

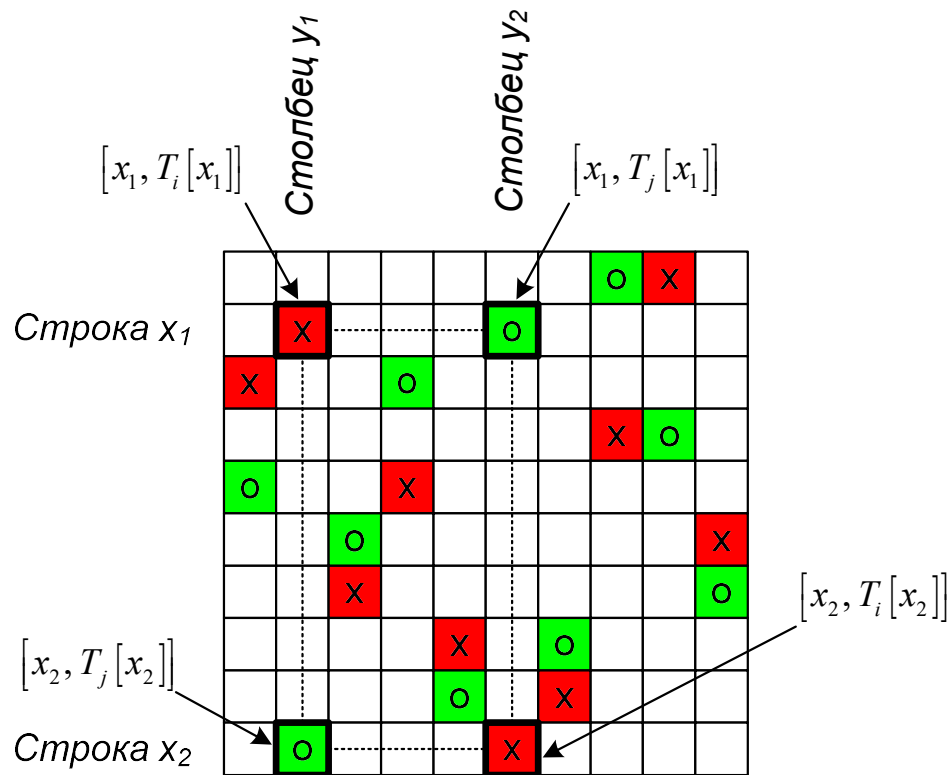


Пример диагонализации (продолжение): получение побочной диагонали



Условие симметричности по Брауну для пары трансверсалей

Схематичное описание алгоритма проверки трансверсалей на симметричность по Брауну: элементы трансверсалей должны попарно стоять в вершинах прямоугольников



$$T_j \left[T_i^{-1} \left[T_j \left[x_1 \right] \right] \right] = y_1 = T_i \left[x_1 \right]$$

или

$$T_i \left[T_j^{-1} \left[T_i \left[x_1 \right] \right] \right] = y_2 = T_j \left[x_1 \right]$$

Следствие: вычисление номера парной строки по известной, линейная временная сложность $t \sim O(N)$ вместо квадратичной $t \sim O(N^2)$ при проверке «в лоб»

Особенность при обработке ЛК нечетного порядка: допустима в точности 1 точка пересечения трансверсалей $[x, y] \rightarrow [[N/2], [N/2]]$



Оценка асимптотических сложностей алгоритма диагонализации

Временная сложность:

$$t \simeq O\left(\frac{|T|(|T|-1)}{2}(k_1N + k_2N^2 + k_3N^2)\right) \simeq O(|T|^2N^2),$$

Емкостная сложность:

$$m \simeq O(N)$$

Необходимые исходные структуры данных:

- исходный ЛК

$$m \simeq O(N^2)$$

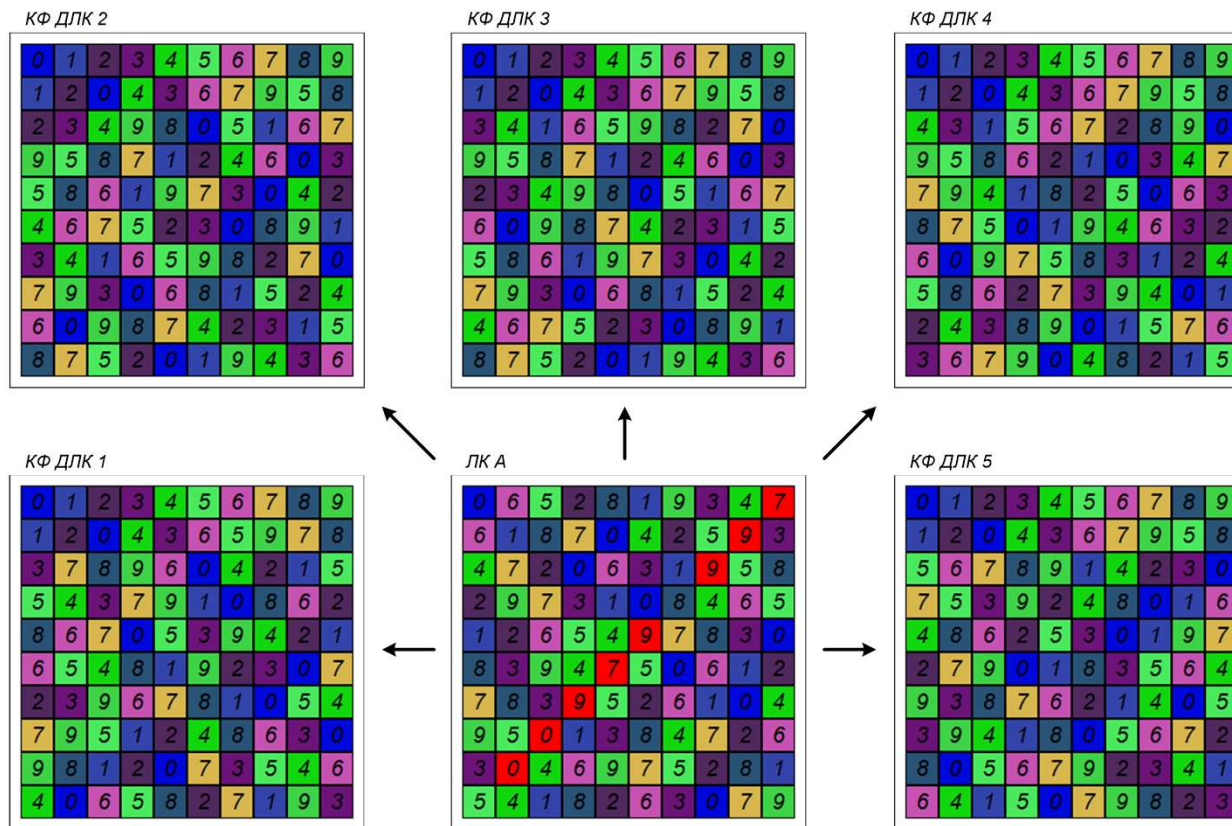
- множество его трансверсалей

$$m \simeq O(|T|N)$$



Понятие канонизации

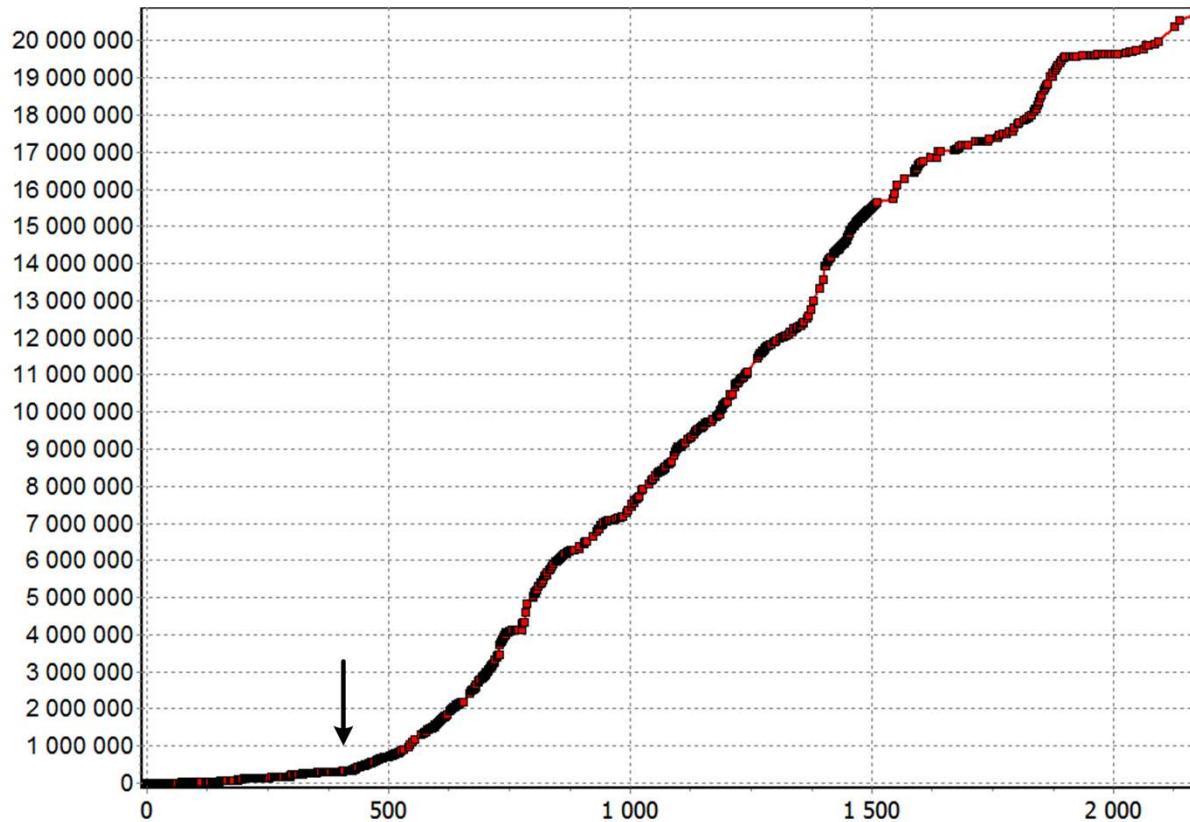
Применение 3 из 6 парастрофических преобразований к заданному ЛК (исключая транспонирование), диагонализация, сохранение по 1 КФ для каждого найденного главного класса ДЛК



Пример 5 из 347 КФ ДЛК, соответствующих
исходному ЛК



Практическое применение канонизации: построение списка КФ ОДЛК порядка 10



- темп перебора в несколько раз выше по сравнению с построением множества диагональных трансверселей для каждого ДЛК в отдельности
- разработано специальное ПО (канонизатор)
- неэффективно при исчерпывающем построении списка КФ ОДЛК

Практическое применение диагонализации: получение ДЛК с рекордными значениями числовых характеристик

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	0	9	5	6	7	8
3	4	9	8	2	7	1	0	5	6
6	5	0	1	7	2	8	9	4	3
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4	0	8	2	3	6	7	1	9	5
8	7	6	5	9	0	4	3	2	1
5	9	1	7	6	3	2	8	0	4
7	6	5	9	8	1	0	4	3	2
2	3	4	0	1	8	9	5	6	7

890 диагональных
трансверсалей

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	2	3	4	9	8	B	5	A	0	6	7
5	8	A	6	B	4	1	3	9	7	0	2
B	7	5	8	A	2	9	1	3	6	4	0
7	5	8	A	6	3	0	2	4	B	9	1
9	0	1	2	3	7	A	B	5	4	8	6
6	B	7	5	8	1	4	0	2	A	3	9
A	6	B	7	5	0	3	9	1	8	2	4
3	4	9	0	1	6	5	A	B	2	7	8
2	3	4	9	0	A	7	8	6	1	B	5
4	9	0	1	2	B	8	6	7	3	5	A
8	A	6	B	7	9	2	4	0	5	1	3

30192 диагональных
трансверсали

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
1	2	0	4	5	3	7	D	9	E	B	C	A	6	8
A	B	C	D	6	7	1	2	4	5	9	E	8	0	3
D	6	7	E	8	9	4	5	C	A	0	1	2	3	B
5	3	4	A	B	C	E	8	1	2	7	D	6	9	0
C	A	B	7	D	6	0	1	3	4	8	9	E	2	5
3	4	5	B	C	A	8	9	2	0	D	6	7	E	1
6	7	D	8	9	E	5	3	A	B	1	2	0	4	C
E	8	9	1	2	0	C	A	7	D	3	4	5	B	6
4	5	3	C	A	B	9	E	0	1	6	7	D	8	2
8	9	E	2	0	1	A	B	D	6	4	5	3	C	7
2	0	1	5	3	4	D	6	E	8	C	A	B	7	9
B	C	A	6	7	D	2	0	5	3	E	8	9	1	4
7	D	6	9	E	8	3	4	B	C	2	0	1	5	A
9	E	8	0	1	2	B	C	6	7	5	3	4	A	D

4620434 диагональных
трансверсали

Числовой ряд A287648 в OEIS



Практическое применение диагонализации: получение ДЛК с рекордными значениями числовых характеристик

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	2	3	4	5	0	B	6	7	8	9	A
9	8	7	6	B	A	1	0	5	4	3	2
4	5	0	1	2	3	8	9	A	B	6	7
6	B	A	9	8	7	4	3	2	1	0	5
B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
3	4	5	0	1	2	9	A	B	6	7	8
2	3	4	5	0	1	A	B	6	7	8	9
A	9	8	7	6	B	0	5	4	3	2	1
5	0	1	2	3	4	7	8	9	A	B	6
7	6	B	A	9	8	3	2	1	0	5	4
8	7	6	B	A	9	2	1	0	5	4	3

198144 трансверсали

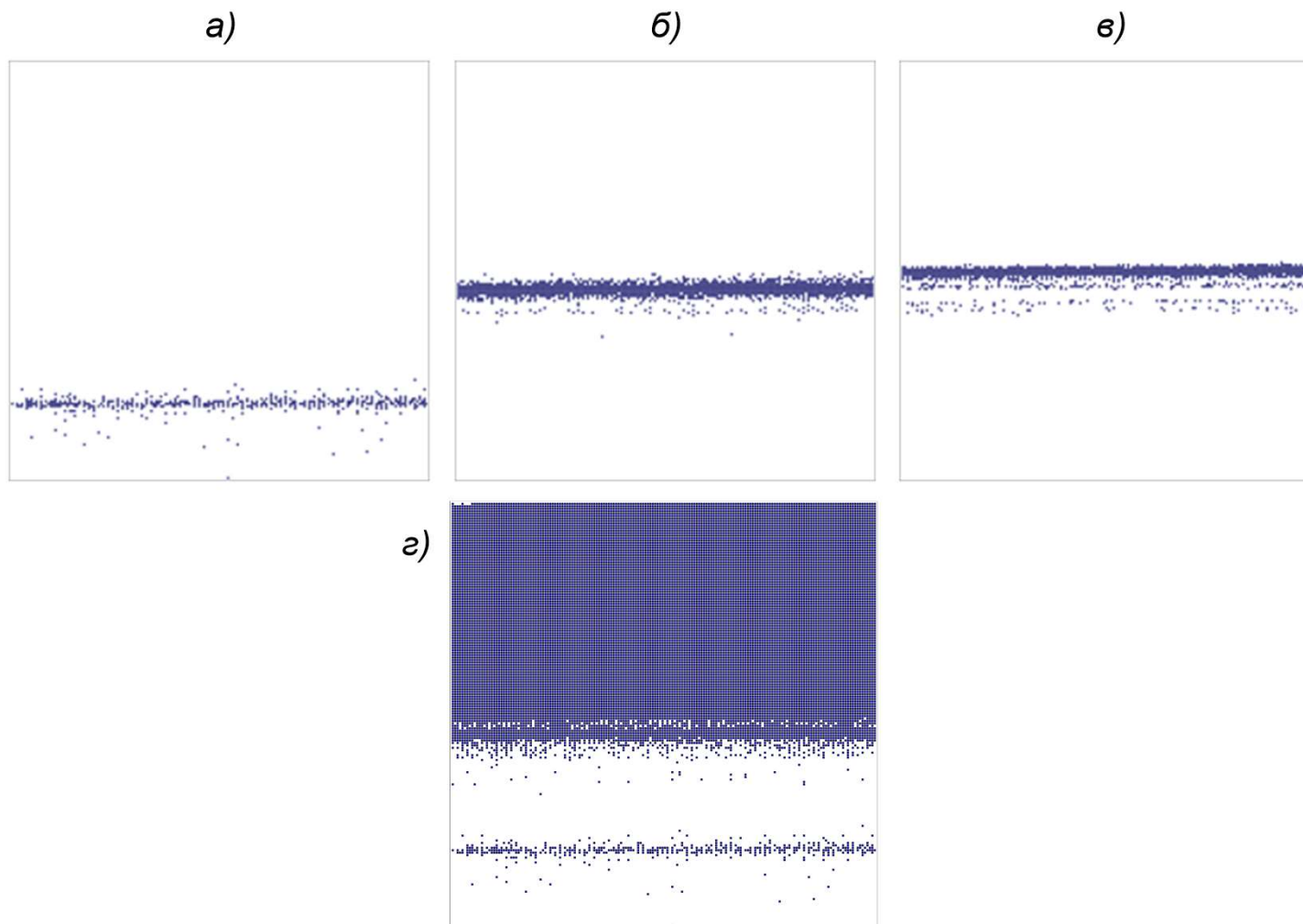
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
1	2	0	4	5	3	7	D	9	E	B	C	A	6	8
A	B	C	D	6	7	1	2	4	5	9	E	8	0	3
D	6	7	E	8	9	4	5	C	A	0	1	2	3	B
5	3	4	A	B	C	E	8	1	2	7	D	6	9	0
C	A	B	7	D	6	0	1	3	4	8	9	E	2	5
3	4	5	B	C	A	8	9	2	0	D	6	7	E	1
6	7	D	8	9	E	5	3	A	B	1	2	0	4	C
E	8	9	1	2	0	C	A	7	D	3	4	5	B	6
4	5	3	C	A	B	9	E	0	1	6	7	D	8	2
8	9	E	2	0	1	A	B	D	6	4	5	3	C	7
2	0	1	5	3	4	D	6	E	8	C	A	B	7	9
B	C	A	6	7	D	2	0	5	3	E	8	9	1	4
7	D	6	9	E	8	3	4	B	C	2	0	1	5	A
9	E	8	0	1	2	B	C	6	7	5	3	4	A	D

36362925 трансверсалией

Числовой ряд A287644 в OEIS



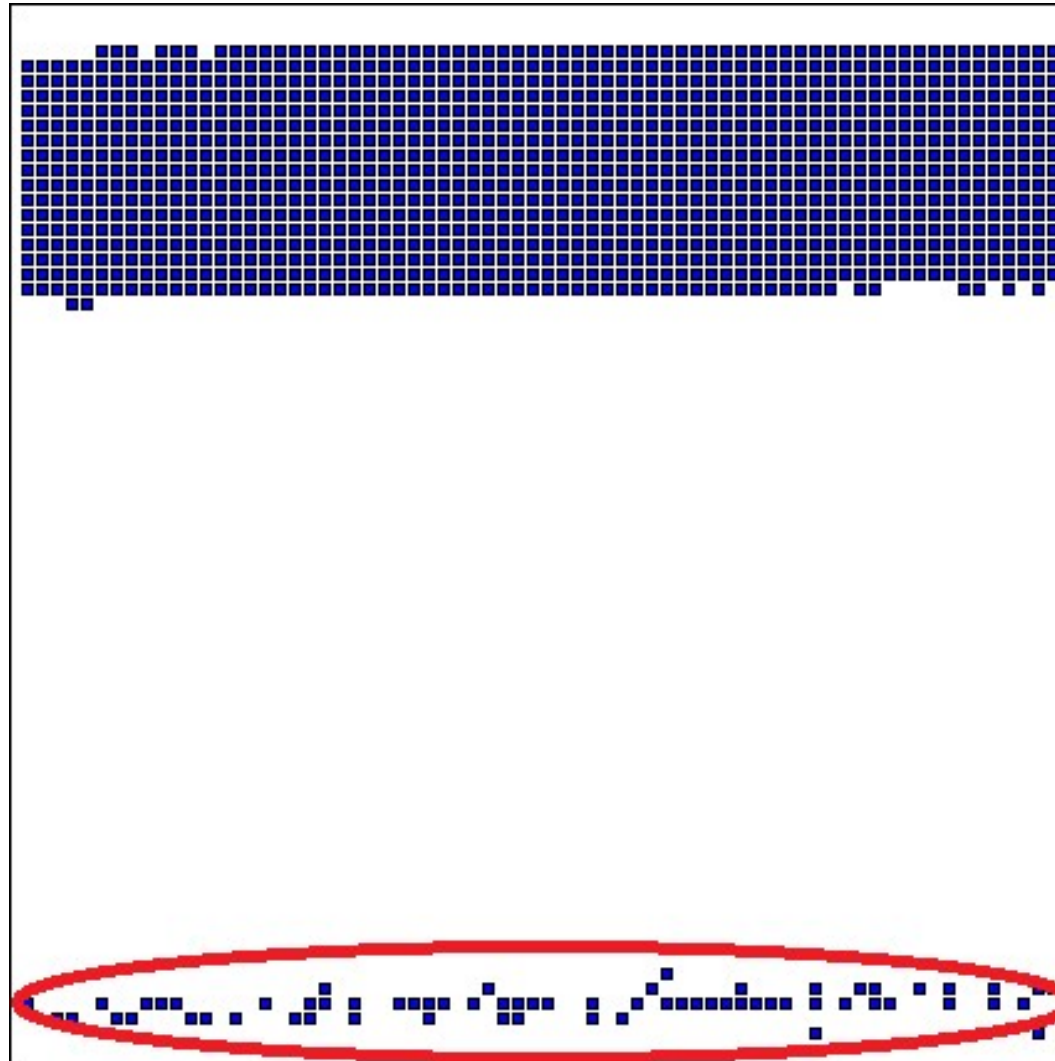
Практическое применение диагонализации: построение спектров (на примере спектра числа диагональных трансверсалей порядка 12)



ДЛК порядка 12 с 198144, 132096 и 122880 трансверсальями соответственно



Практическое применение диагонализации: построение спектров (на примере спектра числа диагональных трансверсалей порядка 11)



Практическое применение диагонализации: построение спектров (на примере спектра числа диагональных трансверсалей порядка 13)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
1	2	0	4	8	6	7	5	C	B	3	A	9
7	C	6	A	3	2	9	8	1	0	B	5	4
6	8	5	B	A	1	2	9	0	4	C	7	3
8	5	4	C	9	A	3	1	2	7	6	0	B
9	B	A	5	6	C	4	0	7	3	8	1	2
A	0	7	8	C	9	5	B	4	2	1	3	6
2	3	B	7	0	8	C	4	6	A	5	9	1
C	6	8	9	1	0	B	A	3	5	2	4	7
B	A	3	6	7	4	8	C	5	1	9	2	0
5	4	9	0	B	3	1	2	A	C	7	6	8
4	7	C	1	2	B	A	3	9	6	0	8	5
3	9	1	2	5	7	0	6	B	8	4	C	A

Без диагонализации:
 $\min = 43979$ диагональных
 трансверсалей

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
1	2	0	4	3	A	8	B	6	C	5	7	9
8	C	9	A	5	2	4	0	3	B	6	1	7
B	6	7	8	0	4	A	9	2	1	3	C	5
2	5	A	B	7	1	C	3	9	8	0	4	6
9	7	3	C	6	B	1	2	5	0	4	8	A
C	9	5	2	A	6	3	1	4	7	8	0	B
3	4	B	9	C	8	0	6	1	5	7	A	2
5	A	1	7	B	0	9	4	C	6	2	3	8
4	3	C	5	9	7	2	8	0	A	B	6	1
7	B	4	6	8	3	5	C	A	2	1	9	0
6	0	8	1	2	C	7	A	B	4	9	5	3
A	8	6	0	1	9	B	5	7	3	C	2	4

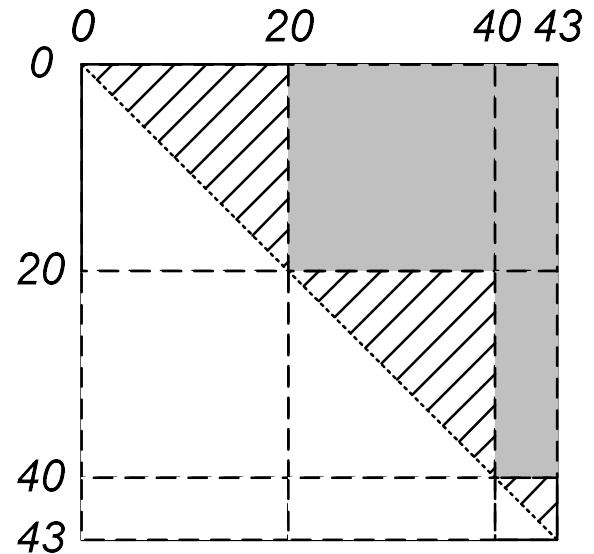
С частичной
 диагонализацией:
 $\min = 43093$ диагональных
 трансверсалей



Распределенная диагонализация

```
for (int i = 0; i < NT; i++)  
    for (int j = i+1; j < NT; j++)  
        ...
```

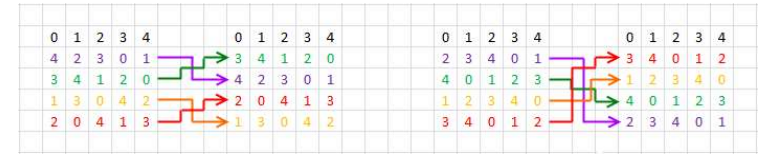
- распараллеливание по внешнему циклу (для `#pragma omp parallel`) – неэффективно (подзадания разной сложности, необходимость хранения полного множества трансверсалей – десятки ГБ RAM в перспективе);
- необходимо разбиения на квадраты $K \times K$ трансверсалей.



Особенности:

- формирование множества трансверсалей двумя порциями;
- отсечение элементов нижней треугольной подматрицы;
- прямоугольники на границе (выход за пределы множества трансверсалей);
- время счета WU пропорционально площади квадрата/треугольника/прямоугольника (разноразмерные WU);
- настроечный параметр K – баланс между временем счета WU и суммарным трафиком (в настоящее время для $N=13$ выбрано $K=50k \rightarrow t \approx 1-2$ ч).





Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам,
принимаящим участие в проекте добровольных
распределенных вычислений RakeSearch!

WWW: <http://evatutin.narod.ru>,
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>
E-mail: evatutin@rambler.ru

